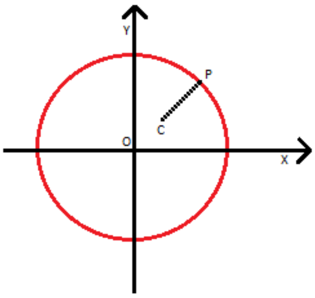
La circonferenza

La circonferenza è la curva piana luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto C, detto centro .La distanza fra ognuno dei suoi punti e il centro è il raggio della circonferenza.



Note le coordinate del centro (α ; β) e la misura r del raggio, l'equazione della circonferenza è:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

L'equazione può anche essere scritta nella forma:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Dove a, b, e c soddisfano le seguenti relazioni;

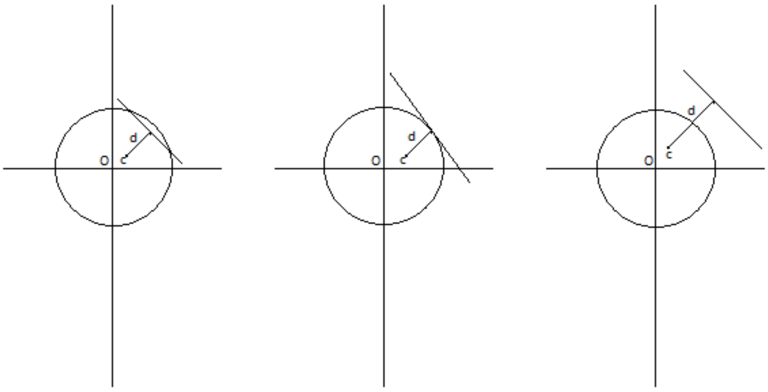
$\alpha = -\frac{a}{2}$, $\beta = -\frac{b}{2}$

r = $\sqrt{(-\frac{a}{2})^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}$,

con $(-\frac{a}{2})^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c > 0$

Se:
a = 0 il centro appartiene all'asse y;
b = 0 il centro appartiene all'asse x;
c = 0 la circonferenza passa per l'origine degli assi.

La posizione di una retta rispetto a una circonferenza



Dato il sistema formato dalle equazioni della circonferenza e delle retta:

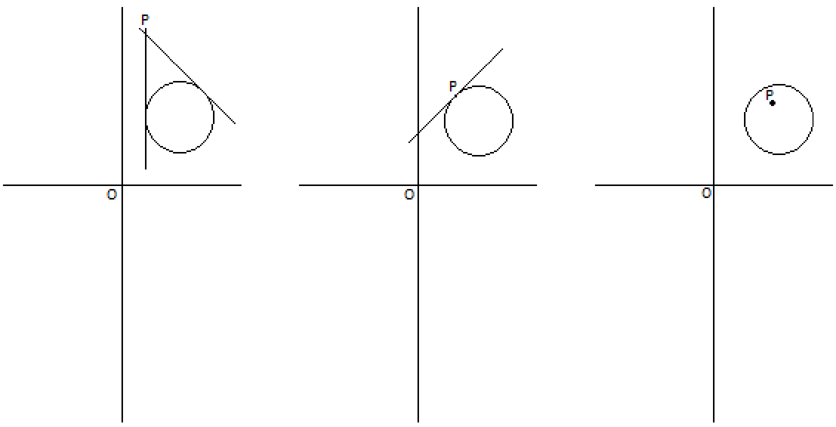
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Se nell'equazione di secondo grado risolvente abbiamo:

- Δ > 0 la retta è secante
- Δ = 0 la retta è tangente
- Δ < la retta è esterna.

Le rette tangenti a una circonferenza

Dato un punto P (x_0 , y_0) e una circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, se P è esterno alla circonferenza , le rette per P tangenti alla circonferenza sono due; se P appartiene alla circonferenza, la retta tangente è una sola; se P è interno alla circonferenza, non esistono rette tangenti uscenti da P.



Per determinare le equazioni delle eventuali rette tangenti, è possibile seguire vari metodi.

I metodo : Nell'equazione di secondo grado nella variabile x, risolvente il sistema:

$$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \end{cases}$$

Si impone Δ = 0.

II metodo: si impone che la distanza tra il centro C e le rette passanti per P, che hanno equazione $y - y_0 = m(x - x_0)$, sia uguale al raggio.

In entrambi i metodi di ottiene un'equazione di secondo grado in m le cui soluzioni reali sono i coefficienti angolari delle rette tangenti.

Se P appartiene alla circonferenza, ci sono ancora altri due metodi.

III metodo: si determina la retta tangente come perpendicolare al raggio PC.

IV metodo: si ottiene l'equazione della tangente con la formula dello sdoppiamento:

$$x \cdot x_0 + y + y_0 + a \cdot \frac{x + x_0}{2} + b \cdot \frac{y + y_0}{2} + c = 0.$$

La posizione di due circonferenze

Due circonferenze possono essere secanti in due punti, tangenti in uno stesso punto (esternamente o internamente), una interna all'altra, concentriche, esterne.

Per determinare gli eventuali punti di intersezione o il punto di tangenza, occorre risolvere il sistema formato dalle equazioni delle due circonferenze:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Se a ≠ a' o b ≠ b' , sottraendo membro a membro si ottiene l'equazione della retta (a – a')x + (b – b')y + (c + c') = 0, detta asse radicale delle due circonferenze.
L'asse radicale è perpendicolare alla retta passante per i centri delle due circonferenze.

I fasci di circonferenze

Date due circonferenze C e C' di equazioni:

(C) $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
(C') $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Si chiama fascio di circonferenze con generatrici C e C' l'insieme della circonferenza C' e di tutte le circonferenze rappresentate dall'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c + k(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0$, con k ∈ ℝ.

Per k = -1 si ottiene l'equazione della retta:

(a – a')x + (b – b')y + c – c' = 0

Che rappresenta l'asse radicale del fascio.
I punti per i quali passano tutte le circonferenze sono detti punti base e si ottengono studiando

l’intersezione delle due generatrici. I centri delle circonferenze del fascio si trovano su una retta perpendicolare all’asse radicale, detta asse centrale.

Per studiare un fascio di circonferenze occorre trovare: centro e raggio; le due generatrici; gli eventuali punti base; l’asse radicale e l’asse centrale; eventuali circonferenze degeneri.