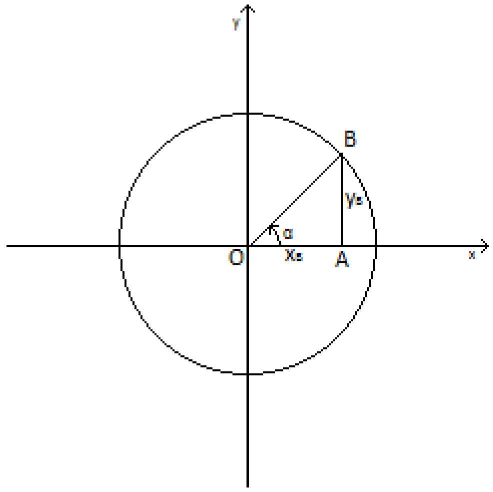
La funzione tangente

Consideriamo un angolo orientato α e chiamiamo B l'intersezione fra il lato e la circonferenza goniometrica di centro O. Definiamo tangente di α la funzione che ad α associa il rapporto, quando esiste, fra l'ordinata e l'ascissa del punto B:

tg α = $\frac{y_B}{x_B}$



Indichiamo con tg α la tangente dell'angolo α.
Consideriamo ancora la circonferenza goniometrica, un suo punto B (x_B ; y_B), la sua proiezione A sull'asse x e l'angolo orientato AOB = α

Anche in questo caso si può dimostrare che il rapporto $\frac{AB}{OA}$ e di conseguenza $\frac{y_B}{x_B}$, non varia se cambiamo il raggio della circonferenza.

Dimostrazione

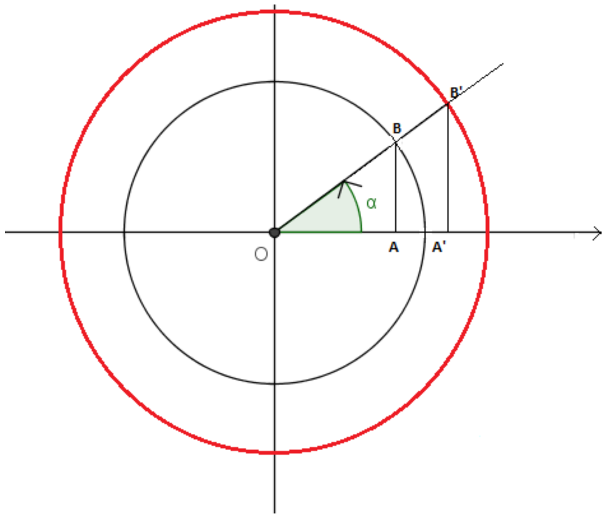
Il prolungamento del raggio OB interseca la seconda circonferenza nel punto B', la cui proiezione sull'asse x è il punto A. I triangoli OAB e OA'B' sono simili quindi vale la seguente proporzione:

AB : OB = A'B' : OA'

Ossia:

$\frac{AB}{OA} = \frac{y_B}{x_B} = \text{tg}\,\alpha$.

Pertanto il rapporto considerato non dipende dalla particolare circonferenza scelta, ma bensi solo dall'angolo.



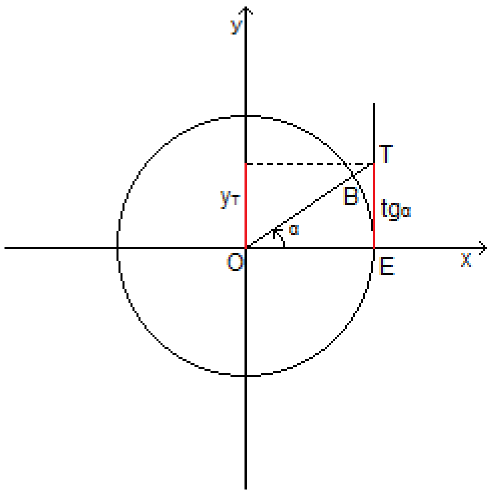
Osserviamo che tale rapporto non esiste quando x_B = 0, ossia quando:

α = $\frac{\pi}{2}$ + kπ

Un altro modo per definire la tangente

Consideriamo la circonferenza goniometrica e la retta tangente a essa nel punto E, origine degli archi: il prolungamento del lato termine OB interseca la retta tangente nel punto T.
La tangente dell'angolo α può anche essere definita come il valore dell'ordinata del punto T, ossia:

tg α = y_T



Dimostrazione dell'equivalenza delle due definizioni date:

Consideriamo i due triangoli rettangoli OAB e OET. Essi sono simili quindi:

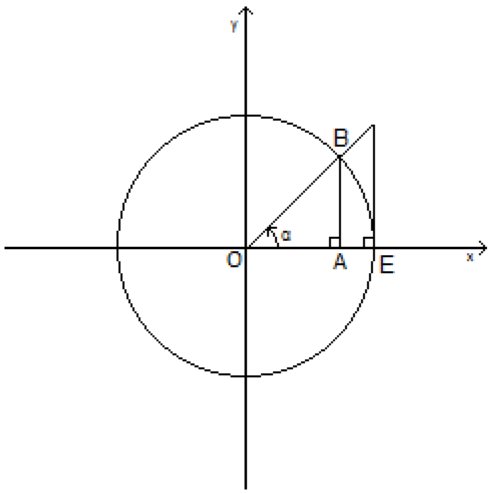
TE : BA = OE : OA → $y_T : y_B = 1 : x_B$

Da cui:

$y_T = \frac{y_B \cdot 1}{x_B}$, ossia $y_T = \frac{y_B}{x_B}$

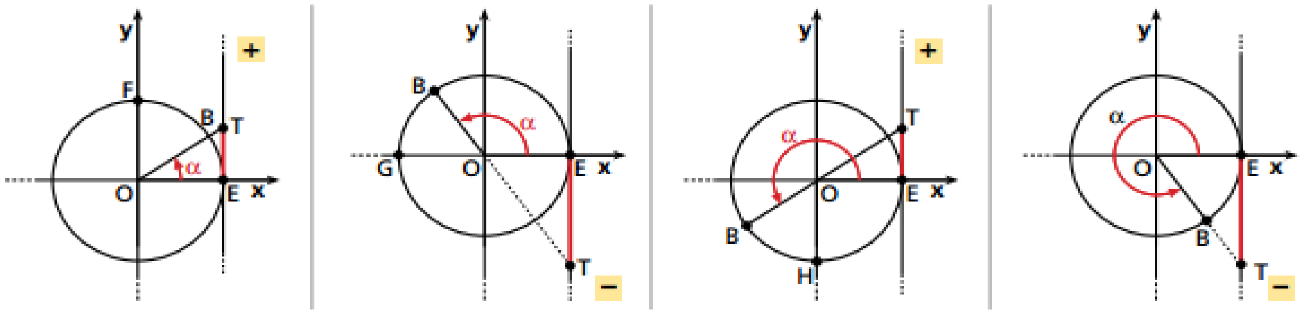
Pertanto :

tg α = $\frac{y_B}{x_B}$ = y_T



Le variazioni della funzione tangente

Studiamo come varia y_T al variare dell'angolo α, legato alla posizione del punto B sulla circonferenza.



a. Finchè B percorre il primo quarto di circonferenza, l'ordinata T è positiva e aumenta man mano B si avvicina al punto F. Quando B $\equiv F$, la tangente non esiste.

b. Quando B percorre la circonferenza nel secondo quadrante, l'ordinata T è negativa, e aumenta fino a quando $B \equiv G$ in cui y_T= 0

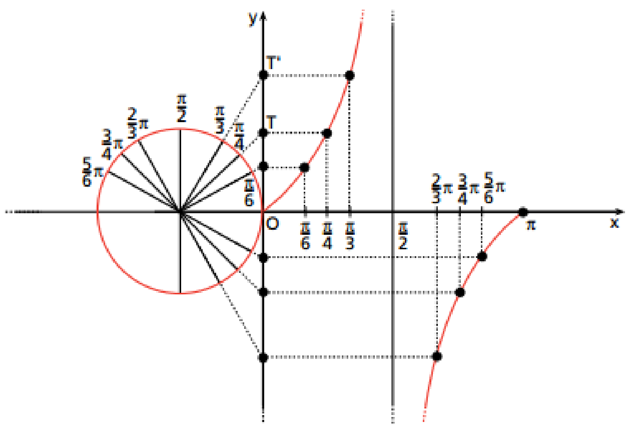
c. Se B si trova nel terzo quadrante, l'ordinata di T è di nuovo positiva e va aumentando fino a quando $B \equiv H$e T non esiste più. La tangente di $\frac{3\pi}{2}$ non esiste.

d. Quando B percorre l'ultimo quarto di circonferenza, l'ordinata di T ritorna negativa e aumenta fino allo 0

A differenza delle funzioni seno e coseno, la funzione tangente può assumere qualunque valore reale. Il suo codominio è quindi ℝ, mentre il suo campo di esistenza è: $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Essendo tg (- α) = - tg α la funzione è una funzione dispari.

Il grafico della funzione y = tg x



Dal grafico notiamo che:

Man mano che x si avvicina a $\frac{\pi}{2}$ con valori minori di $\frac{\pi}{2}$, il valore della funzione tende a diventare più grande, quindi possiamo dire che tende a + ∞. Quando, invece, x si avvicina a $\frac{\pi}{2}$ con valori più di grandi di $\frac{\pi}{2}$, la funzione tende a diventare sempre più grande in valore assoluto, in quanto è negativo, quindi diciamo che tende a - ∞.

x = $\frac{\pi}{2}$ è l'asintoto verticale del grafico.

Il periodo della funzione y = tg x

La tangente è una funzione periodica di periodo π, cioè qualunque sia l'angolo α, è:

tg α = tg (α + kπ), con k ∈ ℤ.

La funzione cotangente

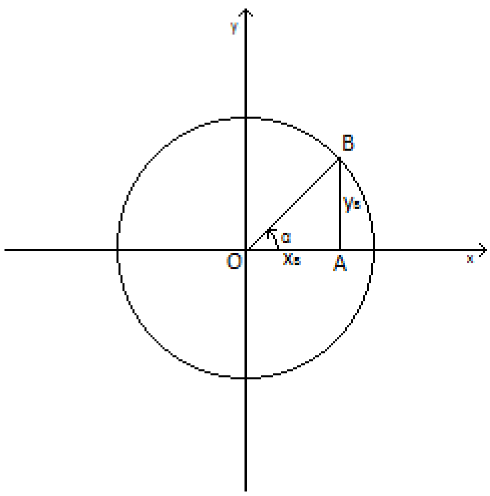
Consideriamo un angolo orientato α e chiamiamo B l'intersezione fra il lato termine e la circonferenza goniometrica . Definiamo cotangente di α la funzione che ad α associa il rapporto, quando esiste, fra l'ascissa e l'ordinata del punto B:

cotg α = $\frac{x_B}{y_B}$

Indichiamo la cotangente di α con cotg α.

La cotangente di un angolo non esiste quando il punto B si trova sull'asse x, ossia quando l'angolo misura 0, π e tutti i multipli interi di π.

cotg α esiste solo quando α ≠ kπ



La cotangente può anche essere espressa come :

cotg α = $\frac{\cos\alpha}{sen\,\alpha}$

Questa relazione è data poichè:

tg α = $\frac{y_B}{x_B}$ e cotg α = $\frac{x_B}{y_B}$, risulta tg α · cotg α = 1 da cui si ricava:

cotg α = $\frac{1}{tg\ \alpha}$ = $\frac{\cos\alpha}{sen\ \alpha}$, con α ≠ $\frac{\pi}{2}$ k

La condizione di esistenza data dipende dal fatto che si considera anche la condizione di esistenza di tg α.

La cotangente, come la tangente può assumere qualsiasi valore reale. Il codominio della cotangente è quindi $\mathbb{R}$, mentre il suo campo di esistenza è x ≠ kπ

Il periodo della funzione cotangente

La funzione tangente risulta essere periodica di periodo π:

cotg α = cotg (α + kπ), con k ∈ $\mathbb{Z}$.