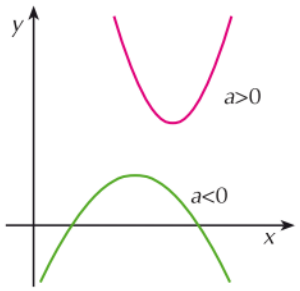
La parabola e la sua equazione

La parabola è il luogo geometrico dei punti equidistanti da una retta (direttrice) e da un punto (fuoco). La retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice si chiama asse della parabola. L'asse della parabola è asse di simmetria e interseca la parabola nel vertice.

Una parabola con asse parallelo all'asse y è rappresentata da un'equazione del tipo
$y = ax^2 + bx + c$ con a ≠ 0.

La concavità e l'apertura della parabola dipendono solo da a.
In particolare l'equazione y = ax^2 rappresenta una parabola con vertice nell'origine degli assi e asse coincidente con l'asse y.



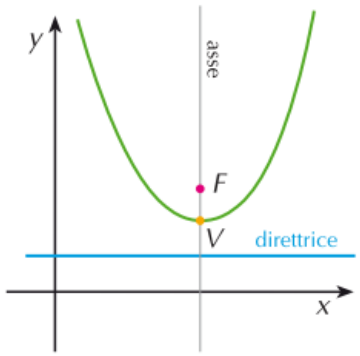
Caratteristiche della parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$

Asse x = $-\frac{b}{2a}$

Vertice V $\left(-\frac{b}{2a}\,;\,-\frac{\Delta}{4a}\right)$

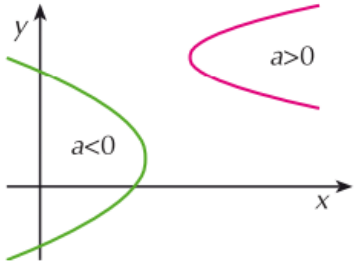
Fuoco F $\left(-\frac{b}{2a}\,;\,\frac{1-\Delta}{4a}\right)$

Direttrice y = $-\frac{1+\Delta}{4a}$



Una parabola con asse parallelo all'asse x è rappresentata da un'equazione del tipo
$x = ay^2 + by + c$ con a ≠ 0. Se a > 0 la parabola rivolge la concavità verso la direzione positiva dell'asse x, se a < 0 verso la direzione negativa.

(C) 2013 - StudentVille.it - La ripubblicazione senza autorizzazione è vietata



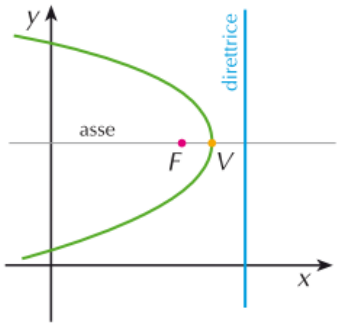
Caratteristiche della parabola di equazione $x = ay^2 + by + c$

Asse y = - $\frac{b}{2a}$

Vertice V (- $\frac{\Delta}{4a}$; - $\frac{b}{2a}$)

Fuoco F ($\frac{1-\Delta}{4a}$; - $\frac{b}{2a}$)

Direttrice x = - $\frac{1+\Delta}{4a}$



La posizione di una retta rispetto a una parabola

Una parabola e una retta possono essere secanti in due punti, essere tangenti in un punto, non intersecarsi in alcun punto oppure, se la retta è parallela all'asse della parabola, intersecarsi in un solo punto.

Supponiamo che la retta non sia parallela all'asse y e che, dunque, la sua equazione possa essere scritta nella forma esplicita y = mx + q.

Risolvendo il sistema formato dall'equazione della parabola e dall'equazione della retta:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases}$$

Si ottiene l'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = mx + q$ ossia:

$$ax^2 + (\,b - m\,)x + c - q = 0$$

Le cui soluzioni sono le scisse dei punti di intersezione della parabola con la retta:

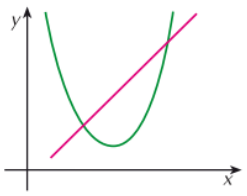
- Se Δ > 0 la retta è secante la parabola in due punti;
- Se Δ = 0 la retta è tangente alla parabola in un punto;

(C) 2013 - StudentVille.it - La ripubblicazione senza autorizzazione è vietata

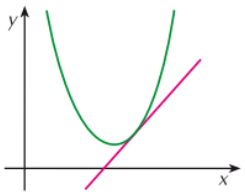
- Se Δ < 0 la retta è esterna alla parabola.

Le rette tangenti a una parabola

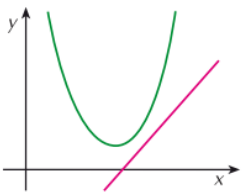
Le rette tangenti a una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$, uscenti in un punto P possono essere due, una o nessuna.



a. $\Delta > 0$ la retta è secante



b. $\Delta = 0$ la retta è tangente



c. $\Delta < 0$ la retta è esterna

Per determinare le equazioni delle eventuali rette passanti per P (x_0 ; y_0) e tangenti alla parabola, si procede nel seguente modo:

- Si scrive l'equazione del fascio di rette passanti per P, y - $y_0 = m(x - x_0)$;
- Si scrive il sistema fra le equazioni del fascio e della parabola:
  $$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0); \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$
  E si ottiene un equazione risolvente di secondo grado in x
- Si pone il discriminante Δ = 0 (condizione di tangenza) e si risolve rispetto a m l'equazione di secondo grado ottenuta:
  - se $m_1 \neq m_2$ le rette tangenti sono due;
  - se $m_1 = m_2$ la retta tangente è una sola e il punto P appartiene alla parabola;
  - se m_1, m_2 non appartiene a $\mathbb{R}$, non esistono rette tangenti.

Per determinare la tangente alla parabola $y = ax^2 + bx + c$ in un suo punto P (x_0 ; y_0) si può usare la formula di sdoppiamento:

$$\frac{y + y_0}{2} = axx_0 + b \cdot \frac{x + x_0}{2} + c$$

Oppure la formula:

$$y - y_0 = (2ax_0 + b)(x - x_0)$$

Per le rette tangenti alla parabola $x = ay^2 + by + c$ si procede come per la parabola $y = ax^2 + bx + c$. Può accadere che nel caso di P esterno una delle due tangenti sia parallela all'asse y, in tal caso nella condizione Δ = 0 si ottiene solo un valore di m.

(C) 2013 - StudentVille.it - La ripubblicazione senza autorizzazione è vietata

I fasci di parabole

Date due parabole γ e γ' (dette parabole generatrici) di equazione $y - ax^2 - bx - c = 0$, $y - a'x^2 - b'x - c' = 0$, con a' ≠ 0, si chiama fascio di parabole generato da γ e γ' l'insieme della parabola γ' e di tutte le parabole rappresentate dall'equazione:

$y - ax^2 - bx - c + k\left(-a'^{x^2} - b'x - c'\right) = 0$, k ∈ $\mathbb{R}$.

Le rette che appartengono al fascio sono parabole degeneri. I punti che appartengono a tutte le parabole del fascio sono detti punti base.
Studiare un fascio di parabole vuol dire descriverne le caratteristiche e , in particolare, determinare le generatrici, gli eventuali punti base, le parabole degeneri.

Come trovare l'equazione di un fascio di parabole

Per determinare l'equazione di un fascio di parabole si deve scrivere la combinazione lineare delle equazioni di due parabole qualsiasi del fascio (che possono essere anche quelle degeneri), prese come generatrici.

In generale possiamo distinguere due casi:

Fasci di parabole per due punti distinti

Dati i punti distinti A (x_A ; y_A) e B (x_B ; y_B) e indicata con y = mx + q l'equazione della retta AB, si può dimostrare che l'equazione:

y = mx + q + k(x - x_A)(x - x_B)

Rappresenta un fascio di parabole passanti per A e B.

Fasci di parabole tangenti in un punto a una retta data

Dato il punto T (x_T ; y_T) appartenente alla retta r di equazione y = mx + q, si può dimostrare che l'equazione:

y = mx + q + k ($x - x_T$)^2

Rappresenta un fascio di parabole tangenti in T alla retta r.

(C) 2013 - StudentVille.it - La ripubblicazione senza autorizzazione è vietata