17.

1971: QUARTO PROBLEMA

CONSIDERATA LA GENERICA PARABOLA DI EQUAZIONE

$$x = ay^2 + by + c$$

SI DETERMININO I COEFFICIENTI a, b, c IN MODO CHE ESSA PASSI PER I PUNTI $(-6;0)$, $(0;2)$, $(0;6)$ - QUINDI SI CALCOLI L'AREA DELLA REGIONE PIANA LIMITATA DALLA CURVA E DALLE TANGENTI AD ESSA NEI PUNTI DI ASCISSA NULLA -

Imponiamo il passaggio dell'equazione generica per i tre punti suddetti - Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -6 = c \\ 0 = 4a + 2b + c \\ 0 = 36a + 6b + c \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} c = -6 \\ 2a + b = 3 \\ 6a + b = 1 \end{cases}$$

che risolto fornisce i valori :

$$a = -\frac{1}{2} \qquad b = 4 \qquad c = -6$$

Quindi la parabola cercata ha equazione

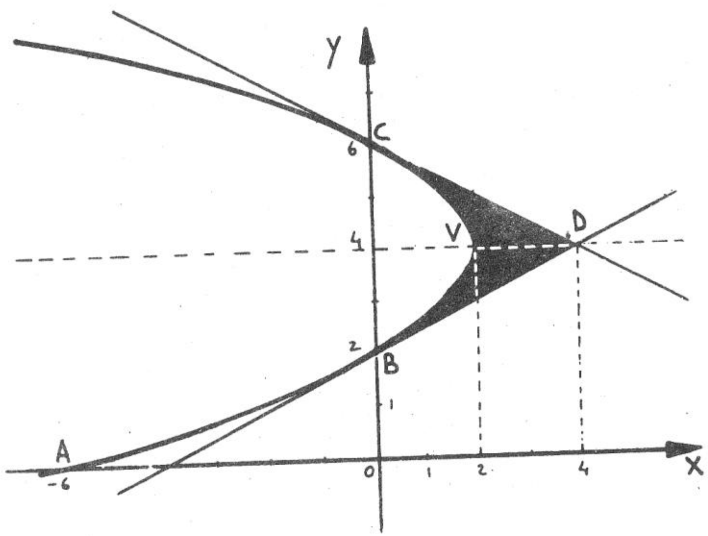
$$x = -\frac{1}{2}y^2 + 4y - 6$$

il vertice, calcolato per mezzo della relazione

$$V \equiv \left(-\frac{\Delta}{4a} ; -\frac{b}{2a}\right)$$

ha coordinate

$$V \equiv (2 ; 4)$$



Determiniamo ora le equazioni delle due rette tangenti alla parabola nei punti B e C.

Non possedendo ancora sufficienti nozioni di analisi per calcolare la y', ricaviamo il coefficiente angolare di tali rette applicando la condizione di tangenza alla parabola e alle rette generiche passanti per B e C.

Per la tangenza in B si ha

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}y^2 + 4y - 6 \\ y - 2 = mx \end{cases}$$

eliminando la y e semplificando

$$mx^2 - 2x(2m-1) = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \longrightarrow (2m-1)^2 = 0 \longrightarrow m = \frac{1}{2}$$

E, per simmetria, il coefficiente angolare della retta tangente passante per C è $m = -\frac{1}{2}$.

Le equazioni delle due rette sono quindi

$$y = \frac{x}{2} + 2 \qquad \text{quella passante per B}$$

$$y = -\frac{x}{2} + 6 \qquad \text{quella passante per C}$$

Risolvendo il sistema formato da queste due ultime equazioni, si trovano le coordinate del punto di intersezione D

$$D \equiv (4;4)$$

Passiamo infine alla determinazione della superficie occupata dalla regione tratteggiata.

L'area del triangolo BCD è

$$S_{BCD} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$$

La superficie del triangoloide CVB è invece

$$S_{CVB} = \int_2^6 \left(-\frac{1}{2}y^2+4y-6\right)dy = \left[-\frac{y^3}{6}+2y^2-6y\right]_2^6 = \frac{16}{3}$$

Per la regione che ci interessa è quindi

$$S = S_{BCD} - S_{CVB} = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$$