

18.

LUGLIO 1972

PRIMO PROBLEMA

SI SCRIVA L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA PASSANTE PER I PUNTI  $A \equiv (-2; 0)$   $B \equiv (4; 0)$  ED AVENTE IL CENTRO SULLA RETTA  $y = 4$  E SI CALCOLINO LE COORDINATE DEGLI ESTREMI DEL DIAMETRO PARALLELO ALL'ASSE DELLE  $x$  -

SI DETERMININO POI I COEFFICIENTI DELL'EQUAZIONE

$$y = ax^2 + bx + c$$

IN MODO CHE LE PARABOLE DA ESSA RAPPRESENTATE ABBIANO IN COMUNE IL PUNTO  $C \equiv (0; 4)$  E SIANO TANGENTI ALL'ASSE DELLE ASCISSE -

TRA QUESTE PARABOLE SI TROVINO QUELLE CHE PASSANO PER L'UNO O PER L'ALTRO DEGLI ESTREMI DEL DIAMETRO SUDDETTO -

SI CALCOLI INFINE L'AREA DELLA REGIONE LIMITATA DALLE PREDETTE PARABOLE E DALL'ASSE DELLE  $x$  -

Poiché il centro della circonferenza si trova sulla retta di equazione  $y = 4$ , l'ordinata del centro è

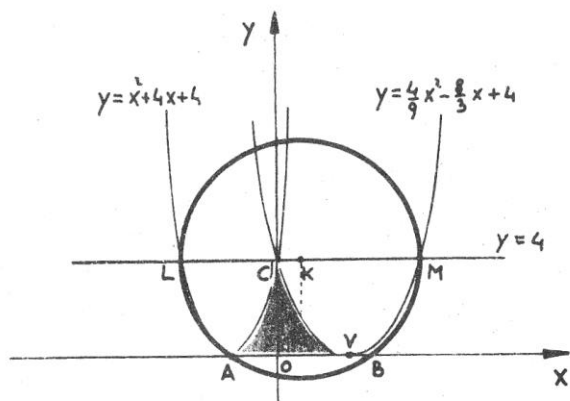
$$\beta = 4$$

e quindi l'equazione generica è

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 8y + \alpha^2 + 16 - r^2 = 0$$

Imponiamo il passaggio di questa equazione generica per i punti A e B. Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 4 + 4\alpha + \alpha^2 + 16 - r^2 = 0 \\ 16 - 8\alpha + \alpha^2 + 16 - r^2 = 0 \end{cases}$$



da cui risolvendo si ricava

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ r = 5 \end{cases}$$

Quindi l'equazione della circonferenza è

$$x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0$$

con centro nel punto  $K \equiv (1; 4)$  e raggio  $r = 5$ .

Gli estremi del diametro parallelo all'asse x hanno coordinate

$$L \equiv (-4; 4)$$

$$M \equiv (6; 4)$$

Passiamo ora all'equazione generica (di una parabola con asse parallelo all'asse x)

$$y = ax^2 + bx + c$$

ed imponiamo ad essa di passare per il punto C. Si ottiene

$$c = 4$$

e l'equazione generica diventa

$$y = ax^2 + bx + 4$$

Imponiamo ora la tangenza all'asse  $x$  (la cui equazione è  $y=0$ )

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

imponiamo che il discriminante si annulli

$$ax^2 + bx + 4 = 0$$

$$\Delta = 0 \longrightarrow b^2 - 16a = 0$$

da cui si ricava

$$a = \frac{b^2}{16}$$

Si ottiene così la famiglia di parabole

$$y = \frac{b^2}{16}x^2 + bx + 4$$

Le due parabole richieste dal testo si hanno imponendo ulteriormente il passaggio per i punti  $L$  ed  $M$  rispettivamente.

$$4 = b^2 - 4b + 4 \longrightarrow \begin{cases} b=0 \\ b=4 \end{cases} \text{ da scartare}$$

$$4 = \frac{9}{4}b^2 + 6b + 4 \longrightarrow \begin{cases} b=0 \\ b=-\frac{24}{9} \end{cases} \text{ da scartare}$$

Le due parabole sono allora:

$$y = x^2 + 4x + 4 \quad \text{quella passante per } L$$

$$y = \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 4 \quad \text{quella passante per } M$$

Calcoliamo le coordinate dei loro punti di intersezione risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle due parabole. Facendo i calcoli si ricava

$$\begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-12 \\ y=100 \end{cases}$$

Il primo punto coincide con il punto  $C$ , mentre il secondo cade fuori grafico.

I vertici delle due parabole sono

$$A \equiv (-2; 0)$$

$$V \equiv (3; 0)$$

L'area della zona più scura nel grafico è

$$S = \int_{-2}^0 (x^2 + 4x + 4) dx + \int_0^3 \left( \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 4 \right) dx =$$

$$= \left[ \frac{x^3}{3} + 2x + 4x \right]_{-2}^0 + \left[ \frac{4}{9} \frac{x^3}{3} - \frac{8}{3} \frac{x^2}{2} + 4x \right]_0^3 = \frac{8}{3} + 4 =$$
$$= \frac{20}{3}$$

Applicando poi il teorema della corda, si ottiene

$$AD = 2r \sin \alpha$$

$$CD = 2r \sin (60 + \alpha)$$

Sostituiamo tali espressioni nella relazione fornita dal testo dell'esercizio:

$$y = \frac{4r^2 \sin^2 \alpha - 4r^2 \sin^2 (60 + \alpha)}{r^2}$$

semplifichiamo  $r^2$  e sviluppiamo

$$y = 4 \sin^2 \alpha - 4 (\sin 60 \cos \alpha + \cos 60 \sin \alpha)^2$$

$$y = 4 \sin^2 \alpha - 4 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha \right)^2$$

$$y = 3 \sin^2 \alpha - 2\sqrt{3} \sin \alpha \cos \alpha - 3 \cos^2 \alpha$$

$$y = \frac{3 \sin^2 \alpha - 2\sqrt{3} \sin \alpha \cos \alpha - 3 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$$

dividiamo numeratore e denominatore per  $\cos^2 \alpha$

$$y = \frac{3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 2\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha - 3}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$$

ed applicando infine la relazione  $x = \operatorname{tg} \alpha$  fornita dal testo, si ottiene

$$y = \frac{3x^2 - 2\sqrt{3}x - 3}{x^2 + 1}$$

L'insieme di definizione è

$$-\infty \leq x \leq \infty$$

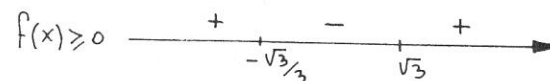
non vi sono asintoti verticali perché non esistono valori reali di  $x$  che annullino il denominatore. Non vi sono asintoti obliqui, ma c'è un asintoto orizzontale di equazione  $y = 3$  perché

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 3$$

Le intersezioni con gli assi cartesiani hanno coordinate

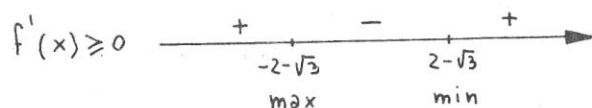
$$\begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\sqrt{3}/3 \\ y=0 \end{cases}$$

Studiando il segno di  $f(x)$  si ottiene



Calcoliamo ora la derivata prima della funzione e studiamone il segno

$$y' = \frac{2(\sqrt{3}x^2 + 6x - \sqrt{3})}{(x^2+1)^2}$$

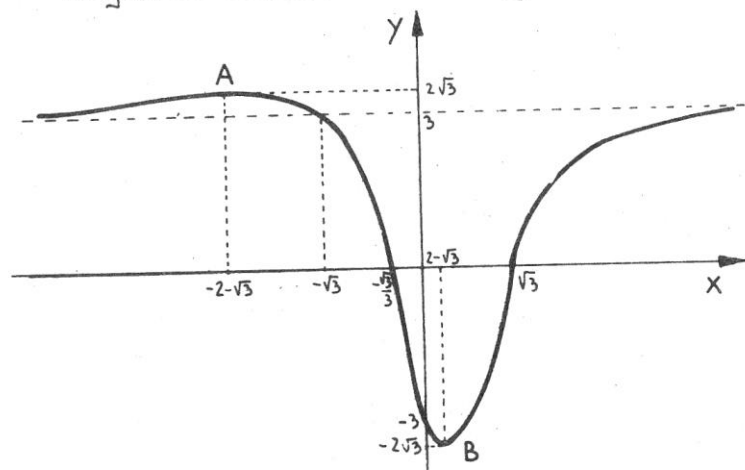


Le coordinate dei punti caratteristici sono quindi:

$$A \equiv (-2-\sqrt{3}; 2\sqrt{3}) \quad \text{massimo}$$

$$B \equiv (2-\sqrt{3}; -2\sqrt{3}) \quad \text{minimo}$$

Il grafico conclusivo è il seguente



20.

## 1972: TERZO PROBLEMA

SI STUDI LA VARIAZIONE DELLA FUNZIONE

$$y = \sin 2x \cos x$$

NELL'INTERVALLO

$$0 \leq x \leq 2\pi$$

Applicando le formule di duplicazione la funzione diventa

$$y = 2 \sin x \cos^2 x$$

Troviamo le intersezioni con gli assi cartesiani

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3}{2}\pi; 2\pi \\ y=0 \end{cases}$$

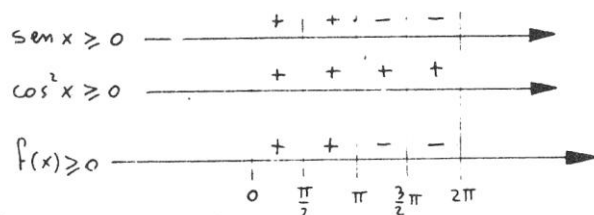
infatti ponendo  $y=0$

$$2 \sin x \cos^2 x = 0$$

da cui

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \quad x = \frac{k\pi}{2}$$

Studiamo il segno di  $f(x)$ :



Calcoliamo ora la derivata prima

$$y' = 2 \cos^3 x - 4 \sin^2 x \cos x$$

$$y' = 2 \cos x (\cos^2 x - 2 \sin^2 x)$$

$$y' = 2 \cos x (3 \cos^2 x - 2)$$

e i punti in cui essa si annulla

$$\cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3}{2}\pi$$

$$\cos^2 x = \frac{2}{3} \approx 0,66 \rightarrow \cos x \approx \pm 0,8124 \rightarrow x \approx 36^\circ = \frac{\pi}{5}$$

e quindi

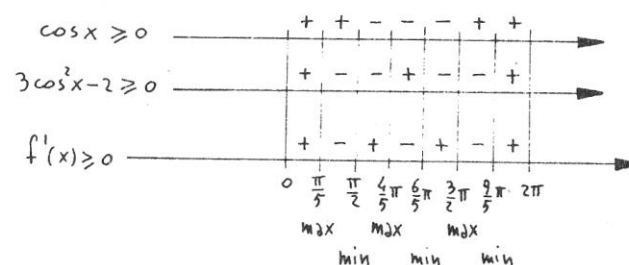
$$x = \frac{\pi}{5}; x = \frac{4}{5}\pi; x = \frac{6}{5}\pi; x = \frac{9}{5}\pi$$

Le coordinate di tali punti caratteristici sono

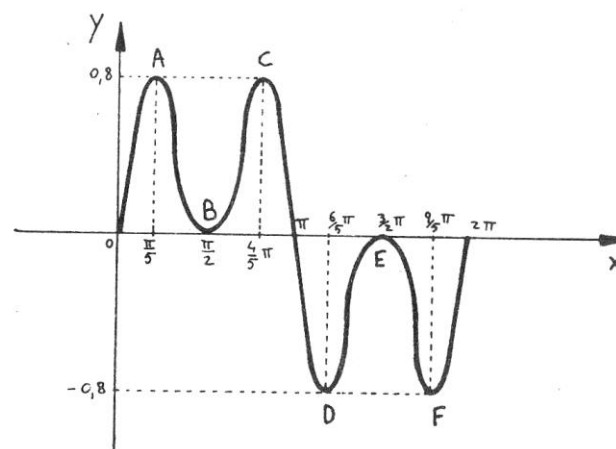
$$A \equiv \left(\frac{\pi}{5}; 0,8\right) \quad B \equiv \left(\frac{\pi}{2}; 0\right) \quad C \equiv \left(\frac{4}{5}\pi; 0,8\right)$$

$$D \equiv \left(\frac{6}{5}\pi; -0,8\right) \quad E \equiv \left(\frac{3}{2}\pi; 0\right) \quad F \equiv \left(\frac{9}{5}\pi; -0,8\right)$$

Studiando il segno della derivata prima, si ha



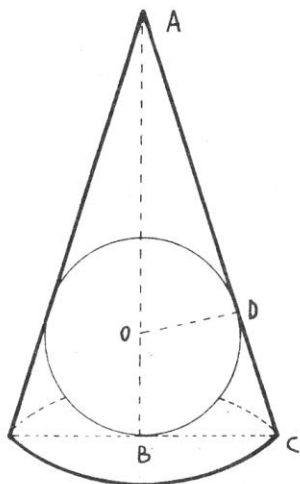
Quindi A, C, E sono punti di massimo, mentre B, D, F sono punti di minimo. Il grafico è il seguente



21.

## 1972: QUARTO PROBLEMA

SI DETERMININO L'ALTEZZA E IL RAGGIO DI BASE DEL CONO DI VOLUME MINIMO CIRCOSCRITTO AD UNA DATA SFERA DI RAGGIO  $r$ . SI DIMOSTRI POI CHE IL SUDDETTO CONO E' ANCHE QUELLO DI MINIMA SUPERFICIE TOTALE.



$$\overline{OB} = \overline{OD} = r \quad (r \geq 0)$$

Poniamo

$$\overline{AO} = x \quad (x > r)$$

Risulta

$$\overline{AB} = r + x$$

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{OD}^2} = \sqrt{x^2 - r^2}$$

I due triangoli ADO e ABC sono simili e quindi vale la proporzione

$$\overline{AD} : \overline{OD} = \overline{AB} : \overline{BC}$$

da cui si ricava

$$\overline{BC} = \frac{\overline{OD} \cdot \overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{r \cdot (r+x)}{\sqrt{x^2 - r^2}}$$

Indicando con  $y$  il volume (variabile) del cono, si ottiene

$$y = \frac{\pi \cdot \overline{BC}^2 \cdot \overline{AB}}{3} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot (r+x)^2 \cdot (r+x)}{3(x-r)(x+r)}$$

$$y = \frac{\pi r^2 (r+x)^2}{3(x-r)}$$

Calcoliamo il minimo di questa funzione.

$$y' = \frac{6\pi r^2 (r+x)(x-r) - 3\pi r^2 (r+x)^2}{9(x-r)^2}$$

$$y' = \frac{\pi r^2 (x^2 - 2rx - 3r^2)}{3(x-r)^2} = 0$$

$$x^2 - 2rx - 3r^2 = 0$$

$$x = r \pm \sqrt{r^2 + 3r^2} = r \pm 2r = \begin{cases} 3r \\ -r \end{cases} \text{ da scartare}$$

Studiando il segno di  $y'$  si ha

$$f'(x) \geq 0 \quad \begin{array}{c} \text{Valori imposs.} \\ r \end{array} \quad \begin{array}{c} - \\ \text{min.} \\ 3r \end{array} \quad +$$



Quindi la funzione ha un minimo per  $x = 3r$ .  
Per tale valore dell'incognita risulta

$$\overline{AB} = r + 3r = 4r$$

$$\overline{BC} = \frac{r \cdot 4r}{\sqrt{9r^2 - r^2}} = r\sqrt{2}$$

Passiamo ora a calcolare la superficie del cono

$$S_t = \pi \cdot \overline{BC} \cdot (\overline{AC} + \overline{BC})$$

$$\begin{cases} \overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{(r+x)^2 + \frac{r^2(r+x)^2}{x^2 - r^2}} = \frac{x(r+x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} \\ \overline{BC} = \frac{r(r+x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} \end{cases}$$

E sostituendo ed indicando con  $y$  la superficie (variabile), si ottiene

$$y = \pi \frac{r(r+x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} \left( \frac{x(r+x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} + \frac{r(r+x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} \right)$$

semplificando si ha

$$y = \frac{\pi r (r+x)^2}{x - r}$$

che essendo uguale alla funzione precedente (quella esprimente il volume) a meno di una costante, ammetterà un minimo per lo stesso valore trovato in precedenza.

22.

LUGLIO 1972

Sessione ammalati

PRIMO PROBLEMA

DATE LE DUE PARABOLE RAPPRESENTATE DALLE EQUAZIONI

$$y = x^2 - 7x + 12$$

$$y = 4x^2 - 25x + 36$$

SI DETERMININO LE COORDINATE DEI PUNTI ADESSE COMUNI, LE EQUAZIONI DELLE TANGENTI COMUNI E LE COORDINATE DEI PUNTI DI CONTATTO.

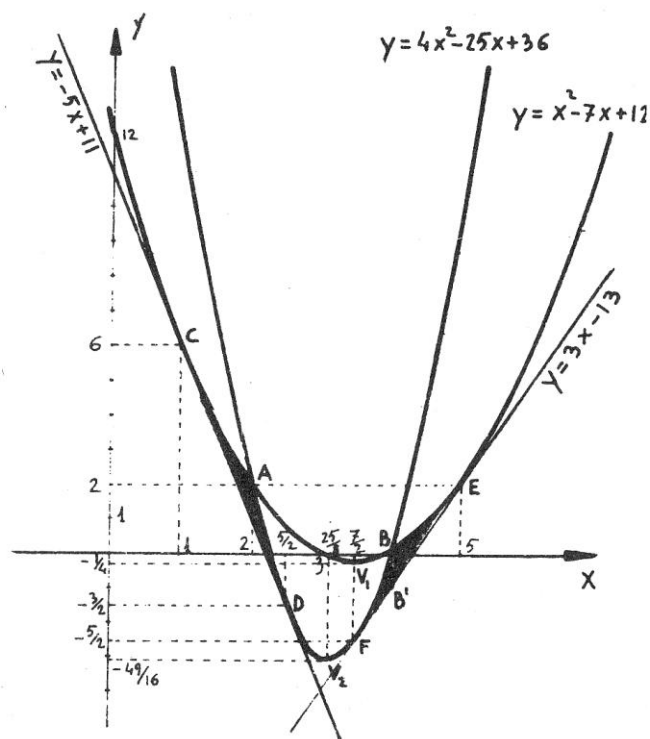
SI CALCOLI POI L'AREA DI UNA DELLE DUE REGIONI PIANE LIMITATE DALLE PARABOLE E DA UNA DELLE SUDDETTE TANGENTI.

Utilizzando la formula  $V \equiv (-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a})$  calcoliamo le coordinate dei vertici delle due parabole, e le intersezioni con gli assi.

Si ottiene

$$V_1 \equiv \left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{4}\right)$$

$$V_2 \equiv \left(\frac{25}{8}; -\frac{49}{16}\right)$$



Nel grafico precedente sono disegnate le due parabole. Per una più chiara comprensione dei calcoli che seguiranno, il segmento unitario sulle ascisse ha lunghezza doppia rispetto a quello sulle ordinate.

Le coordinate dei punti di intersezione fra le due parabole sono

$$\begin{cases} y = x^2 - 7x + 12 \\ y = 4x^2 - 25x + 36 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} A &\equiv (2; 2) \\ B &\equiv (5; 0) \end{aligned}$$

Le equazioni delle rette tangenti ad entrambe le parabole si ricavano mettendo a sistema ciascuna parabola con la retta generica ed imponendo ad entrambi i sistemi la condizione di tangenza

$$\begin{cases} y = x^2 - 7x + 12 \\ y = mx + q \end{cases} \rightarrow \Delta_1 = 0 \rightarrow (7+m)^2 - 4(12-q) = 0$$

$$\begin{cases} y = 4x^2 - 25x + 36 \\ y = mx + q \end{cases} \rightarrow \Delta_2 = 0 \rightarrow (m+25)^2 - 16(36-q) = 0$$

Risolvendo il sistema formato dalle due relazioni così ottenute, si trovano i valori di  $m$  e  $q$ .

che soddisfano le condizioni richieste

$$\begin{cases} (7+m)^2 - 4(12-q) = 0 \\ (m+25)^2 - 16(36-q) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=3 \\ q=-13 \end{cases} \quad \begin{cases} m=-5 \\ q=11 \end{cases}$$

Vi sono quindi due rette tangenti di equazioni

$$y = 3x - 13$$

$$y = -5x + 11$$

Calcoliamo ora le coordinate dei punti di contatto fra le due rette tangenti e le due parabole. Risolvendo i sistemi si ottiene:

$$\begin{cases} y = x^2 - 7x + 12 \\ y = 3x - 13 \end{cases} \rightarrow E \equiv (5; 2)$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 7x + 12 \\ y = -5x + 11 \end{cases} \rightarrow C \equiv (1; 6)$$

$$\begin{cases} y = 4x^2 - 25x + 36 \\ y = 3x - 13 \end{cases} \rightarrow F \equiv \left(\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right)$$

$$\begin{cases} y = 4x^2 - 25x + 36 \\ y = -5x + 11 \end{cases} \rightarrow D \equiv \left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$$

Occupiamoci infine delle due regioni di piano limitate dalle parabole e dalle rette tangenti.

Nel grafico tali zone sono segnate in scuro. Ci conviene occuparci di quella di destra perché l'intersezione B fra le due parabole si trova esattamente sull'asse x, e ciò rende più facile il calcolo.

La superficie cercata può essere scomposta in due "triangoloidi" B'BE e FBB', le cui rispettive aree sono

$$S_{B'BE} = \int_4^5 (x^2 - 7x + 12) dx - \int_4^5 (3x - 13) dx = \frac{6}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} S_{FBB'} &= \left| \int_{\frac{7}{2}}^4 (3x - 13) dx - \int_{\frac{7}{2}}^4 (4x^2 - 25x + 36) dx \right| = \\ &= \left| -\frac{7}{8} + \frac{17}{24} \right| = \left| -\frac{1}{6} \right| = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

e quindi

$$S_{FBE} = S_{B'BE} + S_{FBB'} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

23.

## 1972: SECONDO PROBLEMA

SI DISEGNI LA CURVA DI ECUAZIONE

$$y = \frac{2x}{x^2 + x - 1}$$

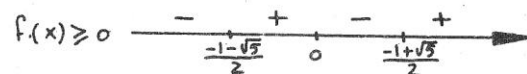
SI DETERMININO LE COORDINATE DEI PUNTI COMUNI AD ESSA E ALLA SUA SIMMETRICA RISPETTO ALL'ASSE DELLE  $y$  E SI CALCOLI L'AREA DEL QUADRILATERO CONVESSO FORMATO DALLE TANGENTI ALLE DUE CURVE NEI PUNTI COMUNI DI ASCISSA NON NULLA.

La curva ha due asintoti verticali di equazione

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

e un asintoto orizzontale di equazione  $y = 0$ .  
L'unica intersezione con gli assi cartesiani è nell'origine.

Studiando il segno della funzione si ottiene



La derivata prima è

$$y' = -2 \frac{x^2 + 1}{(x^2 + x - 1)^2}$$

