

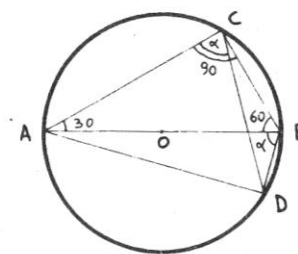
DATA UNA CIRCONFERENZA DI DIAMETRO $AB = 2r$ SI PRENDA SUDI ESSA, DA PARTE OPPOSTA DI AB , DUE PUNTI C E D TALI CHE

$$\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3} \quad \widehat{ABD} = \alpha$$

SI CONSIDERI LA FUNZIONE

$$y = \frac{\overline{AD}^2 - \overline{CD}^2}{\overline{BC}^2}$$

ESPRESSA PER MEZZO DI $x = \operatorname{tg} \alpha$ E SE NE STUDI IL GRAFICO.



$$AB = 2r \ (\geq 0)$$

Essendo ABC mezzo triangolo equilatero, e'

$$BC = \frac{AB}{2} = r$$

Applicando poi il teorema della corda, si ottiene

$$AD = 2r \sin \alpha$$

$$CD = 2r \sin (60 + \alpha)$$

Sostituiamo tali espressioni nella relazione fornita dal testo dell'esercizio:

$$y = \frac{4r^2 \sin^2 \alpha - 4r^2 \sin^2 (60 + \alpha)}{r^2}$$

semplifichiamo r^2 e sviluppiamo

$$y = 4 \sin^2 \alpha - 4 (\sin 60 \cos \alpha + \cos 60 \sin \alpha)^2$$

$$y = 4 \sin^2 \alpha - 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha \right)^2$$

$$y = 3 \sin^2 \alpha - 2\sqrt{3} \sin \alpha \cos \alpha - 3 \cos^2 \alpha$$

$$y = \frac{3 \sin^2 \alpha - 2\sqrt{3} \sin \alpha \cos \alpha - 3 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$$

dividiamo numeratore e denominatore per $\cos^2 \alpha$

$$y = \frac{3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 2\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha - 3}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$$

ed applicando infine la relazione $x = \operatorname{tg} \alpha$ fornita dal testo, si ottiene

$$y = \frac{3x^2 - 2\sqrt{3}x - 3}{x^2 + 1}$$

L'insieme di definizione è

$$-\infty \leq x \leq \infty$$

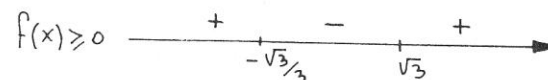
non vi sono asintoti verticali perché non esistono valori reali di x che annullino il denominatore. Non vi sono asintoti obliqui, ma c'è un asintoto orizzontale di equazione $y = 3$ perché

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 3$$

Le intersezioni con gli assi cartesiani hanno coordinate

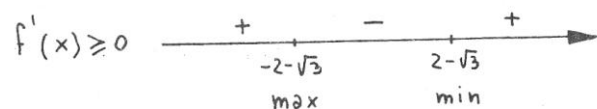
$$\begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\sqrt{3}/3 \\ y=0 \end{cases}$$

Studiando il segno di $f(x)$ si ottiene



Calcoliamo ora la derivata prima della funzione e studiamone il segno

$$y' = \frac{2(\sqrt{3}x^2 + 6x - \sqrt{3})}{(x^2 + 1)^2}$$



Le coordinate dei punti caratteristici sono quindi:

$$A \equiv (-2-\sqrt{3}; 2\sqrt{3}) \quad \text{massimo}$$

$$B \equiv (2-\sqrt{3}; -2\sqrt{3}) \quad \text{minimo}$$

Il grafico conclusivo è il seguente

