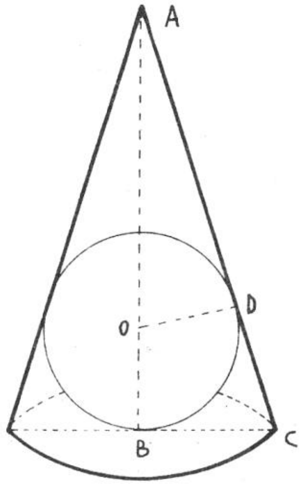
21.

1972: QUARTO PROBLEMA

SI DETERMININO L'ALTEZZA E IL RAGGIO DI BASE DEL CONO DI VOLUME MINIMO CIRCOSCRITTO AD UNA DATA SFERA DI RAGGIO r. SI DIMOSTRI POI CHE IL SUDDETTO CONO E' ANCHE QUELLO DI MINIMA SUPERFICIE TOTALE.



$$\overline{OB} = \overline{OD} = r \quad (r \geq 0)$$

Poniamo

$$\overline{AO} = x \quad (x > r)$$

Risulta

$$\overline{AB} = r + x$$

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{OD}^2} = \sqrt{x^2 - r^2}$$

I due triangoli ADO e ABC sono simili e quindi vale la proporzione

$$\overline{AD} : \overline{OD} = \overline{AB} : \overline{BC}$$

da cui si ricava

$$\overline{BC} = \frac{\overline{OD} \cdot \overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{r \cdot (r+x)}{\sqrt{x^2 - r^2}}$$

Indicando con y il volume (variabile) del cono, si ottiene

$$y = \frac{\pi \cdot \overline{BC}^2 \cdot \overline{AB}}{3} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot (r+x)^2 \cdot (r+x)}{3(x-r)(x+r)}$$

$$y = \frac{\pi r^2 (r+x)^2}{3(x-r)}$$

Calcoliamo il minimo di questa funzione.

$$y' = \frac{6\pi r^2 (r+x)(x-r) - 3\pi r^2 (r+x)^2}{9(x-r)^2}$$

$$y' = \frac{\pi r^2 (x^2 - 2rx - 3r^2)}{3(x-r)^2} = 0$$

$$x^2 - 2rx - 3r^2 = 0$$

$$x = r \pm \sqrt{r^2 + 3r^2} = r \pm 2r = \begin{cases} 3r \\ -r \quad \text{da scartare} \end{cases}$$

Studiando il segno di y' si ha

$f'(x) \geq 0$ — valori imposs. | r | $-$ | min. $3r$ | $+$

Quindi la funzione ha un minimo per $x = 3r$.
Per tale valore dell'incognita risulta

$$\overline{AB} = r + 3r = 4r$$

$$\overline{BC} = \frac{r \cdot 4r}{\sqrt{9r^2 - r^2}} = r\sqrt{2}.$$

Passiamo ora a calcolare la superficie del cono

$$S_t = \pi \cdot \overline{BC} \cdot (\overline{AC} + \overline{BC})$$

$$\begin{cases} \overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{(r+x)^2 + \dfrac{r^2(r+x)^2}{x^2 - r^2}} = \dfrac{x(r+x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} \\ \overline{BC} = \dfrac{r(r+x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} \end{cases}$$

E sostituendo ed indicando con y la superficie (variabile), si ottiene

$$y = \pi \frac{r(r+x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} \left(\frac{x(r+x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} + \frac{r(r+x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} \right)$$

semplificando si ha

$$y = \frac{\pi r (r+x)^2}{x - r}$$

che essendo uguale alla funzione precedente (quella esprimente il volume) a meno di una costante, ammetterà un minimo per lo stesso valore trovato in precedenza.