25.

1972: QUARTO PROBLEMA

SI DISCUTA LA SEGUENTE EQUAZIONE

$$2K\,x^2 + 2(K+1)\,x + K^2 + 1 = 0$$

PER X COMPRESO FRA $-\frac{1}{2}$ E $+1$

Adottiamo il metodo di discussione di Tartinville.

Determiniamo perciò per quali intervalli dei valori di K risultano positive o negative le relazioni esprimenti:

A	coefficiente del termine di secondo grado
Δ o $\frac{\Delta}{4}$	discriminante (intero o ridotto)
$f(\alpha)$, $f(\beta)$	valori che l'equazione assume per $x=\alpha$ e $x=\beta$ (nel nostro caso e $\alpha=-\frac{1}{2}$ e $\beta=1$)
$\Sigma-\alpha$, $\Sigma-\beta$	dove $\Sigma=-\frac{b}{2a}$ è il punto medio fra le due radici dell'equazione.

Facendo i calcoli si trova:

$A \geq 0$ quando $K \geq 0$

$\frac{\Delta}{4} \geq 0 \longrightarrow$

$$(K+1)^2 - 2K(K^2+1) \geq 0$$
$$-2K^3 + K^2 + 1 \geq 0$$
$$(K-1)(-2K^2-K-1) \geq 0$$

cioè quando $K \leq 1$

$f(-\frac{1}{2}) \geq 0 \longrightarrow K(K-\frac{1}{2}) \geq 0$

cioè quando $K \leq 0$ e $K \geq \frac{1}{2}$

$f(1) \geq 0 \longrightarrow K^2 + 4x + 3 \geq 0$

cioè quando $K \leq -3$ e $K \geq -1$

$\Sigma + \frac{1}{2} \geq 0 \longrightarrow$

$$\frac{-K-1}{2K} + \frac{1}{2} \geq 0$$
$$\frac{-1}{2K} \geq 0$$

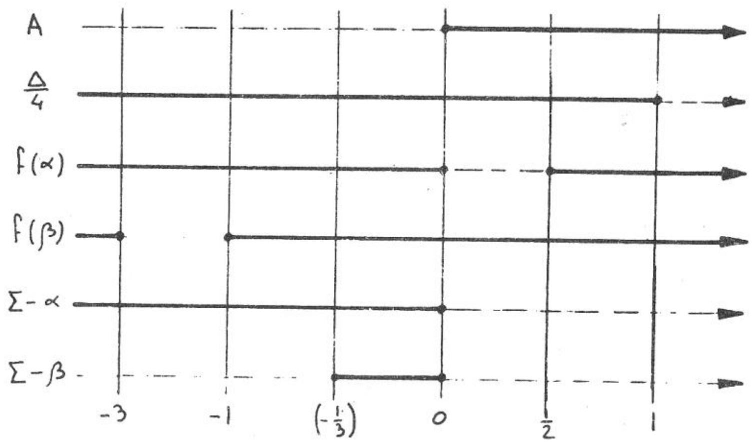
cioè quando $K \leq 0$

$\Sigma - 1 \geq 0 \longrightarrow$

$$\frac{-K-1}{2K} - 1 \geq 0$$
$$\frac{-3K-1}{2K} \geq 0$$

cioè quando $-\frac{1}{3} \leq K \leq 0$

Ora riuniamo in un unico quadro riassuntivo i risultati ottenuti. Il valore $K = -\frac{1}{3}$ viene messo fra parentesi perchè non rappresenta un caposaldo di discussione (per tale valore si annulla solo $\Sigma - \beta$).



Ricordiamo che quando A ed $f(\alpha)$ hanno segno concorde, α è esterno all'intervallo delle radici. E' invece interno a tale intervallo quando i segni sono discordi.

Altrettanto si può dire per A e $f(\beta)$. Possiamo allora ricavare dal quadro le seguenti indicazioni:

$K < -3$	$x_1 \quad \alpha \quad \beta \quad x_2$
$K = -3$	$x_1 \quad \alpha \quad \beta = x_2$
$-3 < K < -1$	$x_1 \quad \alpha \quad x_2 \quad \beta$
$K = -1$	$x_1 \quad \alpha \quad \beta = x_2$
$-1 < K < 0$	$x_1 \quad \alpha \quad \beta \quad x_2$
$K = 0$	$\alpha = x_1 \quad \beta$
$0 < K < \frac{1}{2}$	$x_1 \quad \alpha \quad x_2 \quad \beta$
$K = \frac{1}{2}$	$x_1 \quad \alpha = x_2 \quad \beta$
$\frac{1}{2} < K < 1$	$x_1 \quad x_2 \quad \alpha \quad \beta$
$K = 1$	$x_1 = x_2 \quad \alpha \quad \beta$
$K > 1$	soluzioni complesse coniugate

Quindi in conclusione si ha una soluzione accettabile per

$$-3 \leq K \leq -1$$

e per

$$0 \leq K \leq \frac{1}{2}$$