23.

## 1972: SECONDO PROBLEMA

SI DISEGNI LA CURVA DI EQUAZIONE

$$y = \frac{2x}{x^2 + x - 1}$$

SI DETERMININO LE COORDINATE DEI PUNTI COMUNI AD ESSA E ALLA SUA SIMMETRICA RISPETTO ALL'ASSE DELLE $y$ E SI CALCOLI L'AREA DEL QUADRILATERO CONVESSO FORMATO DALLE TANGENTI ALLE DUE CURVE NEI PUNTI COMUNI DI ASCISSA NON NULLA.

La curva ha due asintoti verticali di equazione

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

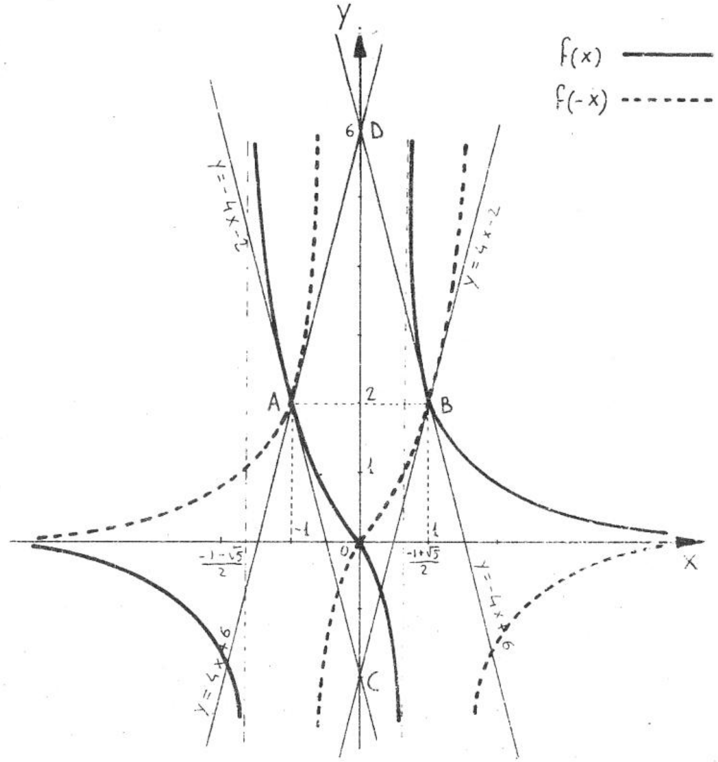
e un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$.
L'unica intersezione con gli assi cartesiani è nell'origine.
Studiando il segno della funzione si ottiene

$f(x) \geq 0$: $-$ per $x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $+$ tra $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ e $0$; $-$ tra $0$ e $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $+$ per $x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$



La derivata prima è

$$y' = -2\,\frac{x^2+1}{(x^2+x-1)^2}$$



Non esistono valori che annullano la derivata prima.
Indicando con $f(x)$ il grafico di questa funzione si ottiene la curva a tratto pieno della figura precedente.
La curva simmetrica a questa rispetto all'asse y è invece indicata con tratteggio.
Data una $f(x)$ la sua simmetrica rispetto all'asse y ha equazione $f(-x)$ e quindi l'equazione della simmetrica nel nostro caso è

$$f(-x) \longrightarrow \quad y = \frac{-2x}{x^2-x-1}$$

La sua derivata prima è

$$y' = \frac{2(x^2+1)}{(x^2-x-1)^2}$$

Calcoliamo le coordinate dei punti di intersezione fra $f(x)$ e $f(-x)$

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x}{x^2+x-1} \\ y = \dfrac{-2x}{x^2-x-1} \end{cases}$$



$$\frac{2x}{x^2+x-1} = \frac{-2x}{x^2-x-1}$$

$$2x(x^2-x-1) = -2x(x^2+x-1)$$

poichè non interessa la soluzione $x=0$, possiamo dividere i due membri per $2x$

$$x^2-x-1 = -x^2-x+1$$

da cui si ottiene

$$x = \pm 1$$

quindi le intersezioni hanno coordinate

$$A \equiv (-1\,;\,2) \qquad B \equiv (1\,;\,2)$$

La derivata della $f(x)$ calcolata nei punti di ascissa $\pm 1$ fornisce per i coefficienti angolari delle rette tangenti

$$m = \pm 4$$

e gli stessi valori si ottengono dalla derivata della $f(-x)$ calcolata nei punti di ascissa $\pm 1$.
Quindi le due rette tangenti passanti per A hanno equazione

$$y = 4x+6 \qquad e \qquad y = -4x-2$$

mentre le due rette tangenti passanti per B hanno equazione

$$y = 4x - 2 \qquad e \qquad y = -4x + 6$$

Calcoliamo ora le coordinate del punto C (vedi grafico) e del punto D.

$$\begin{cases} y = 4x - 2 \\ y = -4x - 2 \end{cases} \longrightarrow C \equiv (0\,;\,-2)$$

$$\begin{cases} y = 4x + 6 \\ y = -4x + 6 \end{cases} \longrightarrow D \equiv (0\,;\,6)$$

Il quadrilatero convesso di cui si fa cenno nel testo dell'esercizio, come risulta evidente dal grafico, è un rombo con diagonali

$$\overline{AB} = 2 \qquad e \qquad \overline{CD} = 8$$

e quindi la sua superficie è

$$S = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{2 \cdot 8}{2} = 8$$