22.

LUGLIO 1972

Sessione ammalati

PRIMO PROBLEMA

DATE LE DUE PARABOLE RAPPRESENTATE DALLE EQUAZIONI

$$y = x^2 - 7x + 12$$
$$y = 4x^2 - 25x + 36$$

SI DETERMININO LE COORDINATE DEI PUNTI AD ESSE COMUNI, LE EQUAZIONI DELLE TANGENTI COMUNI E LE COORDINATE DEI PUNTI DI CONTATTO.

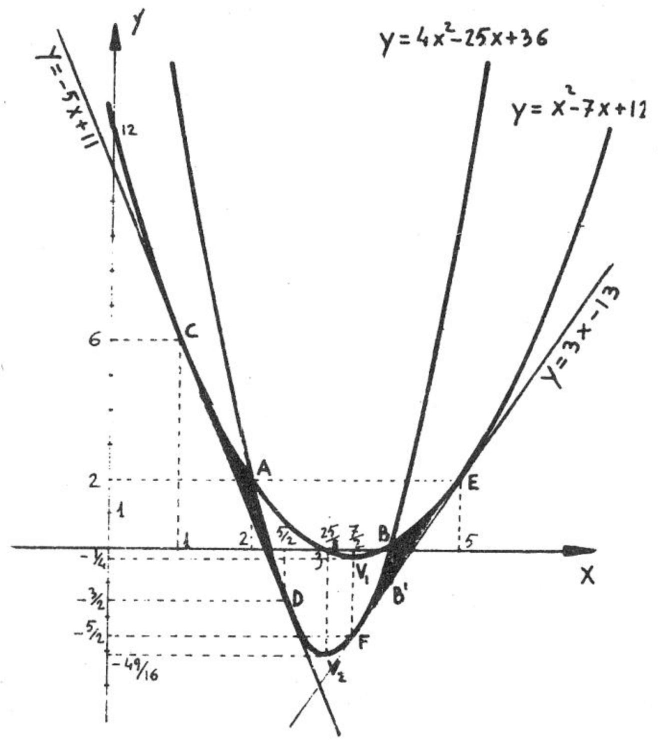
SI CALCOLI POI L'AREA DI UNA DELLE DUE REGIONI PIANE LIMITATE DALLE PARABOLE E DA UNA DELLE SUDDETTE TANGENTI.

Utilizzando la formula $V \equiv \left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ calcoliamo le coordinate dei vertici delle due parabole, e le intersezioni con gli assi.

Si ottiene

$$V_1 \equiv \left(\frac{7}{2}\,;\,-\frac{1}{4}\right)$$

$$V_2 \equiv \left(\frac{25}{8}\,;\,-\frac{49}{16}\right)$$



Nel grafico precedente sono disegnate le due parabole. Per una più chiara comprensione dei calcoli che seguiranno, il segmento unitario sulle ascisse ha lunghezza doppia rispetto a quello sulle ordinate.

Le coordinate dei punti di intersezione fra le due parabole sono

$$\begin{cases} y = x^2 - 7x + 12 \\ y = 4x^2 - 25x + 36 \end{cases} \longrightarrow \quad A \equiv (2\,;\,2) \quad B \equiv (4\,;\,0)$$

Le equazioni delle rette tangenti ad entrambe le parabole si ricavano mettendo a sistema ciascuna parabola con la retta generica ed imponendo ad entrambi i sistemi la condizione di tangenza

$$\begin{cases} y = x^2 - 7x + 12 \\ y = mx + q \end{cases} \longrightarrow \Delta_1 = 0 \longrightarrow (7+m)^2 - 4(12-q) = 0$$

$$\begin{cases} y = 4x^2 - 25x + 36 \\ y = mx + q \end{cases} \longrightarrow \Delta_2 = 0 \longrightarrow (m+25)^2 - 16(36-q) = 0$$

Risolvendo il sistema formato dalle due relazioni così ottenute, si trovano i valori di m e q che soddisfano le condizioni richieste

$$\begin{cases}(7+m)^2-4(12-q)=0\\(m+25)^2-16(36-q)=0\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}m=3\\q=-13\end{cases} \quad \begin{cases}m=-5\\q=11\end{cases}$$

Vi sono quindi due rette tangenti di equazioni

$$y=3x-13$$
$$y=-5x+11$$

Calcoliamo ora le coordinate dei punti di contatto fra le due rette tangenti e le due parabole. Risolvendo i sistemi si ottiene:

$$\begin{cases}y=x^2-7x+12\\y=3x-13\end{cases} \longrightarrow E\equiv(5;2)$$

$$\begin{cases}y=x^2-7x+12\\y=-5x+11\end{cases} \longrightarrow C\equiv(1;6)$$

$$\begin{cases}y=4x^2-25x+36\\y=3x-13\end{cases} \longrightarrow F\equiv\left(\frac{7}{2};-\frac{5}{2}\right)$$

$$\begin{cases}y=4x^2-25x+36\\y=-5x+11\end{cases} \longrightarrow D\equiv\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$$

Occupiamoci infine delle due regioni di piano limitate dalle parabole e dalle rette tangenti.

Nel grafico tali zone sono segnate in scuro. Ci conviene occuparci di quella di destra perchè l'intersezione B fra le due parabole si trova esattamente sull'asse x, e ciò rende più facile il calcolo.

La superficie cercata può essere scomposta in due "triangoloidi" B'BE e FBB', le cui rispettive aree sono

$$S_{B'BE}=\int_4^5(x^2-7x+12)\,dx-\int_4^5(3x-13)\,dx=\frac{6}{5}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$$S_{FBB'}=\left|\int_{7/2}^4(3x-13)\,dx-\int_{7/2}^4(4x^2-25x+36)\,dx\right|=$$

$$=\left|-\frac{7}{8}+\frac{17}{24}\right|=\left|-\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{6}$$

e quindi

$$S_{FBE}=S_{B'BE}+S_{FBB'}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$