26.

## LUGLIO 1973

### PRIMO PROBLEMA

SI SCRIVANO LE EQUAZIONI DELLE DUE CIRCONFERENZE $C'$ E $C''$ TANGENTI ALLA PARABOLA DI EQUAZIONE

$$y = 5 - x^2$$

ED ALLA RETTA DI EQUAZIONE

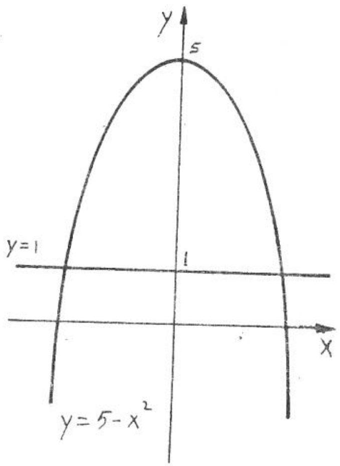
$$y = 1$$

SI INDICHINO CON $r'$ E $r''$ $(r' > r'')$ I RISPETTIVI RAGGI.

DOPO AVER DETERMINATO $r'$ E $r''$ SI SCRIVA L'EQUAZIONE DI UN'ALTRA CIRCONFERENZA $C'''$ TANGENTE ALLA $C''$, AVENTE IL CENTRO SULLA RETTA DEGLI ALTRI DUE CENTRI E RAGGIO UGUALE AD $r'$.

INOLTRE SI TROVI L'EQUAZIONE DELLA PARABOLA TANGENTE A $C''$ E $C'''$ E SI CALCOLI L'AREA DELLA REGIONE DI PIANO LIMITATA DALLE DUE PARABOLE.

Dopo aver disegnato la parabola e la retta, si può osservare che le due circonferenze $C'$ e $C''$ non possono che essere tangenti "internamente" alla parabola, perchè in caso contrario le condizioni fornite dal testo non sarebbero sufficienti alla loro determinazione.




Ne risulta come conseguenza che l'ascissa dei centri di $C'$ e $C''$ deve essere uguale a zero, e perciò entrambe hanno equazione generica

$$x^2+y^2+by+c=0$$

I valori dei parametri $b$ e $c$ si determinano imponendo che si annullino i discriminanti dei sistemi formati dall'equazione generica e dalle equazioni della parabola e della retta:

$$\begin{cases} x^2+y^2+by+c=0 \\ y=5-x^2 \end{cases} \qquad \Delta=0 \longrightarrow b^2-2b-19-4c=0$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+by+c=0 \\ y=1 \end{cases} \qquad \Delta=0 \longrightarrow c=-1-b$$



Da cui ponendo ulteriormente a sistema i due discriminanti

$$\begin{cases} b^2-2b-19-4c=0 \\ c=-1-b \end{cases}$$

si ottengono le due soluzioni

$$\begin{cases} b=3 \\ c=-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=-5 \\ c=4 \end{cases}$$

Le equazioni delle due circonferenze sono quindi

$$C' \longrightarrow x^2+y^2+3y-4=0$$

$$C'' \longrightarrow x^2+y^2-5y+4=0$$

Le coordinate del centro e il raggio sono rispettivamente

$$C' \longrightarrow K\equiv\left(0;\ -\frac{3}{2}\right) \qquad r'=\frac{5}{2}$$

$$C'' \longrightarrow L\equiv\left(0;\ \frac{5}{2}\right) \qquad r''=\frac{3}{2}$$

Passiamo ora alla determinazione dell'equazione della circonferenza $C'''$.

Il suo centro si trova sull'asse $y$. Poichè l'ordinata massima di $C''$ è $y=4$ ed il raggio di $C'''$ deve essere $5/2$ l'ordinata del centro è

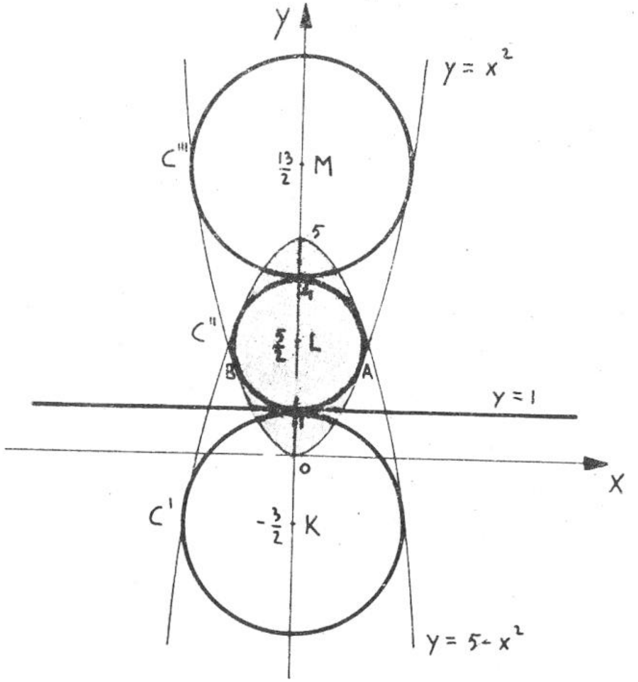
$$4 + \frac{5}{2} = \frac{13}{2}$$

quindi le coordinate del centro di C''' sono

$$M \equiv \left( 0 \, ; \, \frac{13}{2} \right)$$

L'equazione di C''' è allora

$$x^2 + y^2 - 13y + 36 = 0$$






Dalla figura si nota che per simmetria, la parabola tangente a C'' e C''' deve avere il vertice nell'origine degli assi.

Si ricava quindi

$$y = x^2$$

Le intersezioni fra le due parabole si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = 5 - x^2 \\ y = x^2 \end{cases}$$

e si trova

$$A \equiv \left( \frac{\sqrt{10}}{2} \, ; \, \frac{5}{2} \right)$$

$$B \equiv \left( -\frac{\sqrt{10}}{2} \, ; \, \frac{5}{2} \right)$$

Infine l'area cercata è

$$S = \int_{-\frac{\sqrt{10}}{2}}^{\frac{\sqrt{10}}{2}} (5 - x^2)\, dx - 2 \int_0^{\frac{\sqrt{10}}{2}} x^2 \, dx = 5\sqrt{10} - \frac{5\sqrt{10}}{3} =$$

$$= \frac{10\sqrt{10}}{3}$$