27.

1973: SECONDO PROBLEMA

SI DISEGNI IL GRAFICO DELLA FUNZIONE

$$y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

E SE NE DETERMININO I PUNTI PER I QUALI LA DISTANZA DAL PUNTO $A \equiv (0\,;\,1)$ ASSUME VALORE MINIMO.

La funzione è definita per $-\infty \leq x \leq \infty$ ad eccezione dei punti $x = \pm 1$ in cui essa ha due asintoti verticali perchè per tali valori si annulla il denominatore.

Vi è anche un asintoto orizzontale di equazione $y = 1$ perchè

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$$

Non vi sono asintoti obliqui ed esiste una sola intersezione con gli assi cartesiani nel punto $B \equiv (0\,;\,-1)$.

Studiando il segno della funzione si ottiene

$$f(x) \geq 0 \qquad \underset{\quad}{+} \;\; (-1) \;\; \underset{\quad}{-} \;\; (1) \;\; \underset{\quad}{+}$$

La derivata prima è

$$y' = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

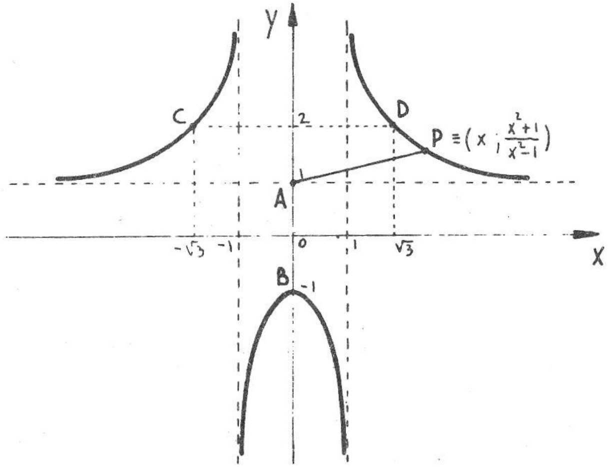
e studiandone il segno si ottiene

$$f'(x) \geq 0 \qquad + \;\; (-1) \;\; + \;\; 0 \;\; - \;\; (1) \;\; -$$

per cui esiste un solo punto di massimo con coordinate

$$B \equiv (0\,;\,-1)$$

Il grafico è il seguente



Il punto generico P che scorre sulla funzione ha coordinate

$$P \equiv \left(x\ ;\ \frac{x^2+1}{x^2-1} \right)$$

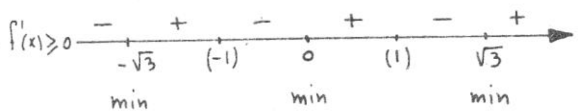
e la distanza $\overline{AP}$ è

$$\overline{AP} = \sqrt{(x-0)^2 + \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} - 1 \right)^2} = \sqrt{x^2 + 4(x^2-1)^{-2}}$$

per ottenere i minimi cercati calcoliamo la derivata prima e studiamone il segno

$$\frac{x\left[1 - \frac{8}{(x^2-1)^3} \right]}{\sqrt{x^2 + \frac{4}{(x^2-1)^2}}} \geq 0$$

Si ottiene



Esistono quindi tre punti di minimo le cui coordinate sono

$$B \equiv (0\ ;\ -1) \qquad C \equiv (-\sqrt{3}\ ;\ 2) \qquad D \equiv (\sqrt{3}\ ;\ 2)$$