

29

1973: QUARTO PROBLEMA

SI STUDI LA FUNZIONE

$$y = \frac{1+x^3}{x^2}$$

E SE NE DISEGNI IL GRAFICO.

SI SCRIVA POI L'EQUAZIONE DELLA TANGENTE NEL SUO PUNTO A DI ORDINATA NULLA E QUELLA DELLA RETTA PASSANTE PER LO STESSO PUNTO E TANGENTE ALLA CURVA IN UN ULTERIORE PUNTO B.

DETTA C L'INTERSEZIONE DELLA PRIMA TANGENTE CON IL GRAFICO, SI CALCOLI L'AREA DELLA REGIONE PIANA LIMITATA DAL SEGMENTO BC E DAL GRAFICO STESSO.

L'insieme di definizione della funzione è

$$-\infty < x < \infty$$

con eccezione del punto $x=0$ in cui si è un asintoto verticale perché si annulla il denominatore.

Non esistono asintoti orizzontali perché

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+x^3}{x^2} = \pm\infty$$

Vi è però un asintoto obliquo perché

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^3}{x^3} = 1 \rightarrow m=1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)-mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x^3}{x^2} - x \right) = 0 \rightarrow q=0 \end{cases}$$

corrispondente alla retta di equazione

$$y = mx + q$$

e cioè

$$y = x$$

Le intersezioni con gli assi sono

$$\begin{cases} x=0 \\ y \rightarrow \infty \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$$

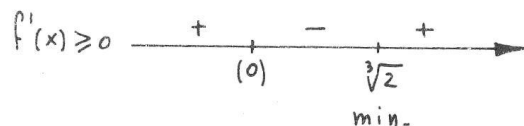
Studiando il segno della funzione si ottiene

$$f(x) \geq 0 \quad \begin{array}{c} - \quad + \quad + \\ \hline -1 \quad (0) \end{array}$$

Calcoliamo ora la derivata prima e studiamone il segno

$$y' = \frac{x^4 - 2x}{x^4} \geq 0$$

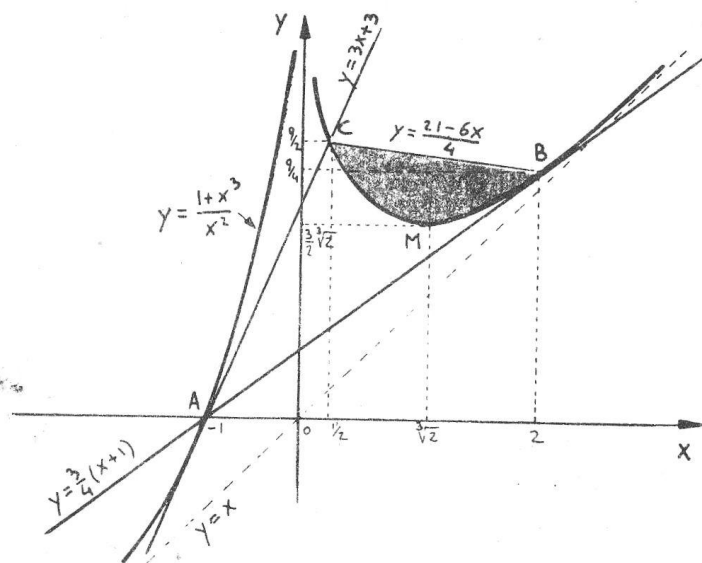
e si ottiene



Esiste quindi un solo punto di minimo con coordinate

$$M \equiv \left(\sqrt[3]{2} ; \frac{3}{2} \sqrt[3]{2} \right)$$

Il grafico della funzione è il seguente



Il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto $A \equiv (-1; 0)$, è

$$f'(-1) = \frac{1+2}{1} = 3$$

e perciò l'equazione di tale retta è

$$y = 3x + 3$$

Per calcolare l'equazione dell'altra retta tangente richiesta dal testo occorre mettere a sistema il fascio di rette con centro in A, e l'equazione della curva

$$\begin{cases} y = m(x+1) \\ y = \frac{1+x^3}{x^2} \end{cases}$$

ed applicate la condizione di tangenza (cioè porre il $\Delta = 0$). Eliminando la y per confronto si ottiene però una equazione di terzo grado:

$$(m-1)x^3 + mx^2 - 1 = 0$$

ma poiché sappiamo che tale equazione ammette senz'altro la soluzione $x = -1$ (perché la curva passa per il punto A), possiamo dividerla per $x+1$ e scriverla quindi nella forma fattorizzata

$$(x+1)[(m-1)x^2 + x - 1] = 0$$

Per la condizione di tangenza è sufficiente allora che risulti nullo il discriminante dell'equazione entro parentesi quadra:

$$1 + 4(m-1) = 0$$

da cui si ottiene

$$m = \frac{3}{4}$$

perciò l'equazione della seconda retta tangente è

$$y = \frac{3}{4}(x+1)$$

Risolvendo ora i sistemi formati dall'equazione della curva e dalle equazioni delle due rette tangenti, si ricavano le coordinate dei punti B e C.

Dai calcoli si ottiene

$$B \equiv (2; \frac{9}{4}) \quad C \equiv (\frac{1}{2}; \frac{9}{2})$$

L'equazione della retta passante per i punti B e C è

$$y = \frac{21-6x}{4}$$

Calcoliamo infine l'area della regione limitata dalla retta BC e dalla curva (nel grafico essa è colorata più scura).

Si ha

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{21-6x}{4} dx - \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1+x^3}{x^2} dx = \frac{27}{16}$$