LUGLIO 1974
PRIMO PROBLEMA

ASSEGNATA LA FUNZIONE

$$y = \operatorname{sen} x + a \cos x + b \qquad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

SI DETERMININO I VALORI DI a E DI b IN MODO CHE AMMETTA UN MASSIMO RELATIVO $y=0$ NEL PUNTO $x=\frac{\pi}{6}$ E SI DISEGNI LA CURVA RAPPRESENTATIVA DELLA FUNZIONE OTTENUTA.

CONDOTTA LA RETTA TANGENTE ALLA CURVA NEL PUNTO A DI ASCISSA $x=0$, E TRACCIATA LA RETTA $x=\frac{\pi}{2}$, SI CALCOLI L'AREA DELLA REGIONE PIANA LIMITATA DA TALE RETTA, DALLA TANGENTE IN A E DALLA CURVA.

La funzione deve passare per il punto di coordinate $\left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$. Imponiamo perciò il passaggio della funzione generica

$$y = \operatorname{sen} x + a \cos x + b$$

per tale punto. Si ottiene

$$0 = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + a \cos\frac{\pi}{6} + b$$

$$0 = \frac{1}{2} + a\frac{\sqrt{3}}{2} + b$$

da cui si può ricavare uno dei due parametri in funzione dell'altro

$$b = \frac{-1 - a\sqrt{3}}{2}$$

Sostituendo nella funzione generica si elimina così il parametro b

$$\boxed{y = \operatorname{sen} x + a\cos x - \frac{1 + a\sqrt{3}}{2}} \qquad (1)$$

Per eliminare anche il parametro a imponiamo la condizione che nel punto suddetto $\left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$ vi sia un massimo: la derivata prima della funzione deve annullarsi per $x = \frac{\pi}{6}$.

Si ha

$$y' = \cos x - a \operatorname{sen} x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} - a\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - a\frac{1}{2} = 0$$

$$\boxed{a = \sqrt{3}}$$

Sostituendo nella (1) si ha perciò

$$\boxed{y = \operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x - 2} \qquad (2)$$

che è la funzione cercata.

Studiamo il suo andamento grafico nell'intervallo

$$-\pi \leq x \leq \pi$$

come richiesto dal testo.

Non vi sono asintoti di alcun tipo. Annulliamo la derivata prima e risolviamo

$$\cos x - \sqrt{3}\operatorname{sen} x = 0$$

$$1 - \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \longrightarrow x = \frac{\pi}{6} + K\pi$$

Nell'intervallo che ci interessa le uniche soluzioni sono

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = -\frac{5}{6}\pi \end{cases}$$

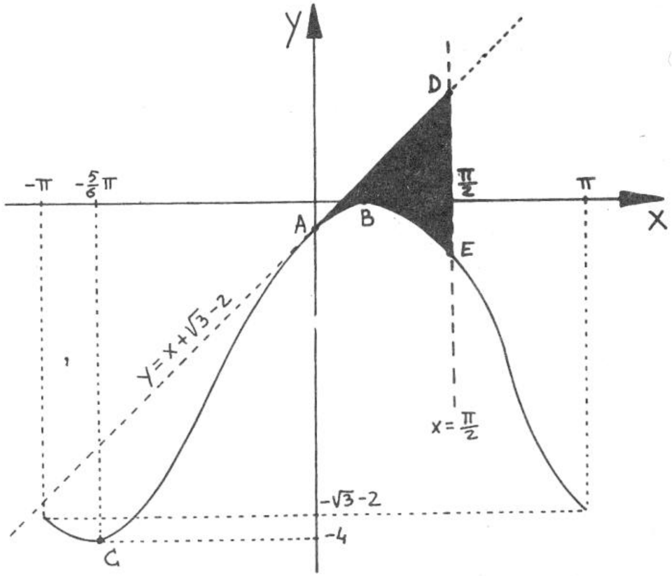
Sostituendo tali valori nella derivata seconda della (2), si individuano un massimo relativo

$$B \equiv \left(\frac{\pi}{6} ; 0\right)$$

e un minimo relativo

$$C \equiv \left(-\frac{5}{6}\pi ; -4\right)$$

Il grafico è allora il seguente



Il punto A ha coordinate

$$A \equiv (0 ; \sqrt{3}-2)$$

La derivata prima della funzione calcolata nel punto A è

$$f'(0) = \cos 0 - \sqrt{3} \text{ sen } 0 = 1$$

la retta tangente alla curva nel punto A è quindi

$$y = mx + q$$

$$\boxed{y = x + \sqrt{3} - 2} \qquad (3)$$

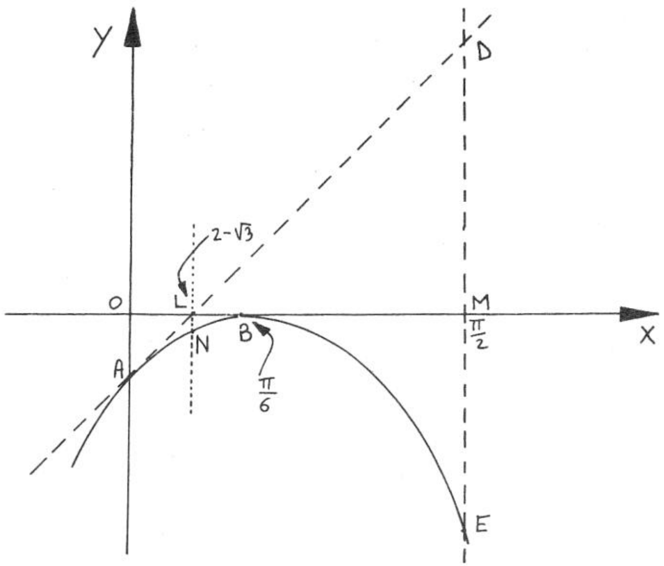
Tracciata anche la retta di equazione $x=\frac{\pi}{2}$ si individuano facilmente i punti

$$D \equiv \left(\frac{\pi}{2} ; \sqrt{3}-\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$E \equiv \left(\frac{\pi}{2} ; -1\right)$$

Occorre infine calcolare l'area del "trian=goloide" colorato ADE.

Per una migliore comprensione del procedi=mento tracciamo un particolare ingrandito del grafico precedente.



Essendo LN la verticale passante per il punto in cui la retta $y = x + \sqrt{3} - 2$ taglia l'asse x ($OL = 2-\sqrt{3}$), scomponiamo la superficie del triangoloide ADE nel modo seguente:

$$S_{ADE} = S_{LMD} + S_{BME} + S_{OBA} - S_{OLA}$$

Facendo i calcoli si ha

$$S_{LMD} = \frac{LM^2}{2} = \frac{\left[\frac{\pi}{2} - (2-\sqrt{3})\right]^2}{2} = \frac{\frac{\pi^2}{4} + 7 - 2\pi + \pi\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{2} =$$
$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{7}{2} - \pi + \pi\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3}$$

$$S_{OLA} = \frac{OL^2}{2} = \frac{(2-\sqrt{3})^2}{2} = \frac{7-4\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{BME} + S_{OBA} = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x - 2\right) dx \right| =$$

$$= \left| \left[-\cos x + \sqrt{3}\operatorname{sen} x - 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right| = \left| \sqrt{3} - \pi + 1 \right| = \pi - \sqrt{3} - 1$$

E quindi

$$S_{ADE} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{7}{2} - \pi + \pi\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3} + \pi - \sqrt{3} - 1 - \frac{7}{2} + 2\sqrt{3} =$$
$$= \frac{\pi^2}{8} + \pi\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} - 1$$

che è l'area richiesta dal problema.