

2.

1974: SECONDO PROBLEMA

SONO ASSEGNATE DUE CIRCONFERENZE C E C' ESTERNE FRA LORO E RISPETTIVAMENTE DI CENTRI O E O' E RAGGI r ED $\frac{r}{2}$.

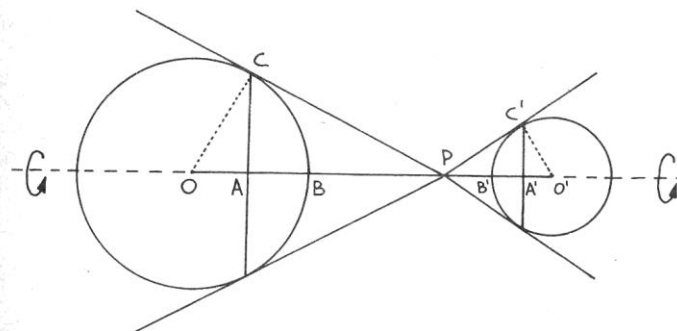
SUL SEGMENTO $\overline{OO'} = a$ SI PRENDA UN GENERICO PUNTO P NON INTERNO ALLE DUE CIRCONFERENZE E SI CONDUCA-NO DA ESSO LE RETTE TANGENTI A C E C' . GLI ARCHI AVENTI PER ESTREMI I PUNTI DI CONTATTO ED INTERSECANTI IL SEGMENTO OO' GENERANO, IN UNA ROTAZIONE DI 180° ATTORNO AD OO' , DUE CALOTTE SFERICHE.

POSTO $\overline{OP} = x$, SI DETERMINI LA POSI-ZIONE DI P IN CORRISPONDENZA DELLA QUALE RISULTA MASSIMA LA SOMMA DELLE AREE DELLE DUE CALOTTE.

Ricordiamo innanzitutto che l'area di una calotta è data dalla formula

$$S = 2\pi \cdot r \cdot h$$

dove r è il raggio della sfera, cui appartiene la calotta e h il suo "spessore"



Risulta

$$OB = r$$

$$O'B' = \frac{r}{2}$$

$$OO' = a$$

$$OP = x$$

$$O'P = a - x$$

La variabile x è vincolata fra i limiti

$$r \leq x \leq a - \frac{r}{2}$$

(1)

Calcoliamo gli "spessori" delle due calotte, cioè la lunghezza dei segmenti AB e $A'B'$.

Poiché il triangolo OPC è rettangolo, possiamo calcolare OA applicando il primo teorema di

Euclide

$$OC^2 = OA \cdot OP$$

$$OA = \frac{OC^2}{OP} = \frac{r^2}{x}$$

da cui

$$AB = OB - OA = r - \frac{r^2}{x}$$

E similmente, per il triangolo $O'PC'$, avremo

$$O'C'^2 = O'A' \cdot O'P$$

$$O'A' = \frac{O'C'^2}{O'P} = \frac{\frac{r^2}{4}}{a-x} = \frac{r^2}{4a-4x}$$

da cui

$$A'B' = O'B' - O'A' = \frac{r}{2} - \frac{r^2}{4a-4x}$$

Per quanto ricordato all'inizio le superfici delle due calotte sono le seguenti

$$\begin{cases} S_1 = 2\pi \cdot OB \cdot AB \\ S_2 = 2\pi \cdot O'B' \cdot A'B' \end{cases}$$

cioè, sostituendo espressioni sopra ricavate, si avrà

$$\begin{cases} S_1 = 2\pi r \left(r - \frac{r^2}{x} \right) = 2\pi r^2 \left(1 - \frac{r}{x} \right) \\ S_2 = 2\pi \frac{r}{2} \left(\frac{r}{2} - \frac{r^2}{4a-4x} \right) = \pi \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{r}{2a-2x} \right) \end{cases}$$

La somma delle superfici delle due calotte costituisce, al variare della x , la funzione seguente

$$y = S_1 + S_2$$

$$y = 2\pi r^2 \left(1 - \frac{r}{x} \right) + \frac{\pi r^2}{2} \left(1 - \frac{r}{2a-2x} \right)$$

$$y = 2\pi r^2 - \frac{2\pi r^3}{x} + \frac{\pi r^2}{2} - \frac{\pi r^3}{4a-4x}$$

$$y = \frac{5\pi r^2}{2} - \frac{2\pi r^3}{x} - \frac{\pi r^3}{4a-4x}$$

Il valore massimo di tale funzione si trova, al solito, uguagliando a zero la sua derivata prima (tenendo presente che π e r sono delle costanti)

$$y' = 0 + \frac{2\pi r^3}{x^2} - \frac{\pi r^3}{4(a-x)^2} = 0$$

$$\frac{\cancel{2\pi r^3}}{x^2} - \frac{\cancel{\pi r^3}}{4(a^2-2ax+x^2)} = 0$$

$$\frac{2}{x^2} = \frac{1}{4(a^2 - 2ax + x^2)}$$

$$8(a^2 - 2ax + x^2) = x^2$$

$$7x^2 - 16ax + 8a^2 = 0$$

$$x = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 56a^2}}{7} = \frac{8a \pm \sqrt{8a^2}}{7} = \frac{8a \pm 2a\sqrt{2}}{7}$$

$$= \begin{cases} \frac{2a(4+\sqrt{2})}{7} & (\cong 1,5a) \\ \frac{2a(4-\sqrt{2})}{7} & (\cong 0,7a) \end{cases}$$

La prima soluzione non è accettabile perché è in contrasto con la limitazione (1) (in quanto fornirebbe una $x > a$), mentre è accettabile la seconda.

Si ha così un'unica soluzione

$$x = \frac{2a(4-\sqrt{2})}{7}$$

che rappresenta il massimo cercato.

Infatti studiando la variazione del segno della y' al variare della x , si ottiene

