

3.

1974: TERZO PROBLEMA

SI STUDI LA FUNZIONE

$$y = \frac{x^3}{2x^2 - 1}$$

E SE NE DISEGNI IL GRAFICO.

PRESI SULLA CURVA I PUNTI A E B
RISPETTIVAMENTE DI ASCISSA $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ E $\frac{\sqrt{3}}{3}$
SI DETERMININO I PUNTI DELL'ARCO AB NEI
QUALI LA TANGENTE ALLA CURVA E' PARAL-
LELA ALLA RETTA AB.

La funzione e' algebrica di terzo grado, ed e'
simmetrica rispetto all'origine perche'.

$$f(x) = -f(-x)$$

L'insieme di definizione e'

$$-\infty < x < \infty$$

ad eccezione dei punti $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ in cui si sono
due asintoti verticali.

Non si sono asintoti orizzontali perche'

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{2x^2 - 1} = \pm\infty$$

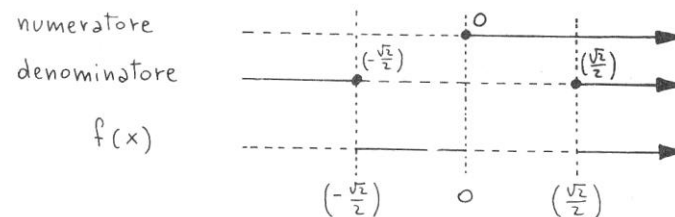
C'e' invece un asintoto obliquo, infatti

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2 - 1} = \frac{1}{2} = m \\ \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x}{2} \right] = 0 = q \end{cases}$$

e quindi la sua equazione e'

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x} \quad (1)$$

Studiamo il segno della $f(x)$ per individuare
in quali zone la curva si trova sopra o sotto
l'asse x .

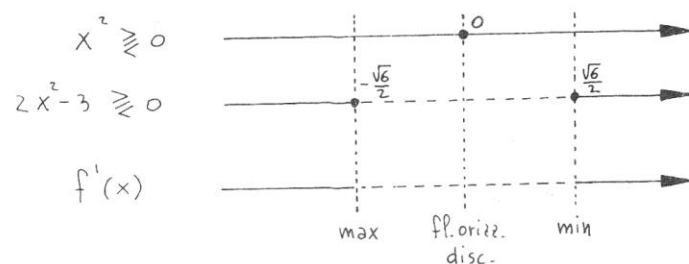


Calcoliamo la derivata prima

$$y' = \frac{3x^2(2x^2-1) - 4x \cdot x^3}{(2x^2-1)^2}$$

$$\boxed{y' = \frac{x^2(2x^2-3)}{(2x^2-1)^2}} \quad (2)$$

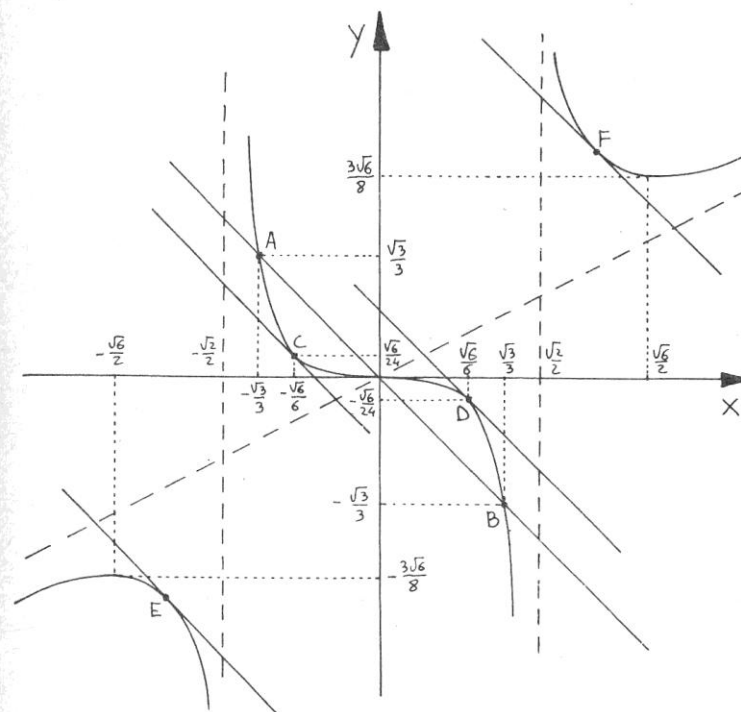
e studiamone il segno (notando che il denominatore è sempre positivo tranne che negli asintoti, e quindi lo possiamo trascurare)



Le ordinate dei tre punti caratteristici trovati, sono

$$\begin{cases} f(-\frac{\sqrt{6}}{2}) = \frac{(-\frac{\sqrt{6}}{2})^3}{2 \cdot \frac{3}{2} - 1} = \frac{-\frac{6\sqrt{6}}{8}}{2} = -\frac{3\sqrt{6}}{8} \\ f(0) = 0 \\ f(\frac{\sqrt{6}}{2}) = \frac{(\frac{\sqrt{6}}{2})^3}{2 \cdot \frac{3}{2} - 1} = \frac{3\sqrt{6}}{8} \end{cases}$$

Il grafico corrispondente alla funzione data è perciò



I punti A e B cui si riferisce il testo hanno coordinate

$$A = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

e quindi la retta AB è la bisettrice del secondo e quarto quadrante, il cui coefficiente angolare è $m = -1$.

Dall'osservazione del grafico risulta evidente che esistono quattro punti (C, D, E, F) nei quali la tangente alla curva ha coefficiente angolare $m = -1$.

Per individuare la loro ascissa è sufficiente porre la (2) (che rappresenta anche il coefficiente angolare della retta generica tangente alla curva), uguale a -1

$$\frac{x^2(2x^2-3)}{(2x^2-1)^2} = -1$$

Risolviamo tale equazione

$$2x^4 - 3x^2 = -4x^4 + 4x^2 - 1$$

$$6x^4 - 7x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{12} = \frac{7 \pm 5}{12} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{6} \end{cases}$$

Le soluzioni sono

$$\begin{cases} x = \pm 1 & \text{ascisse dei punti E e F} \\ x = \pm \frac{\sqrt{6}}{6} & \text{ascisse dei punti C e D} \end{cases}$$

Il testo richiede però solo le coordinate dei due punti C e D interni all'arco AB.

Le loro coordinate sono

$$\begin{cases} C \equiv \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{24}\right) \\ D \equiv \left(\frac{\sqrt{6}}{6}; -\frac{\sqrt{6}}{24}\right) \end{cases}$$