

4.

1974: QUARTO PROBLEMA

SI ESPONGANO BREVEMENTE GLI ELEMENTI DELLA TEORIA PER IL CALCOLO DEGLI ASINTOTI DI UNA CURVA DI EQUAZIONE

$$y = f(x)$$

Per la prima volta uno dei quesiti posti ai candidati per la maturità scientifica, non è un problema nel senso tradizionale, ma una traccia teorica da sviluppare.

Chiaramente l'argomento può essere trattato in diversi modi, uno dei quali potrebbe essere il seguente:

ASINTOTI VERTICALI

Le ascisse degli eventuali asintoti verticali coincidono con quei valori finiti della x che rendono infinita la $f(x)$.

Si possono distinguere i seguenti casi fondamentali:

- 1°) Una funzione algebrica intera (cioè un polinomio uguagliato a zero) non ammette

- mai asintoti verticali.
2°) Una funzione algebrica fratta, cioè del tipo

$$\frac{h(x)}{g(x)} = 0$$

ha tanti asintoti quanti sono i suoi poli [cioè gli zeri della $g(x)$].

- 3°) Una funzione algebrica irrazionale (cioè con l'incognita sotto il segno di radice), ha tanti asintoti verticali quanti sono i suoi poli.

- 4°) Le funzioni trascendenti seno e coseno non hanno asintoti verticali, mentre le funzioni tangente e cotangente ne hanno infiniti a distanza di mezzo periodo uno dall'altro.

- 5°) La funzione trascendente $y = \log f(x)$ [con $f(x) > 0$] ammette tanti asintoti verticali quanti sono gli zeri della $f(x)$.

- 6°) La funzione trascendente $y = a^{f(x)}$

ammette tanti asintoti verticali quanti sono i valori finiti della x che rendono $f(x) = \infty$ (se $a > 1$), oppure che rendono $f(x) = -\infty$ (se $0 < a < 1$) -

ASINTOTI ORIZZONTALI

Basta controllare se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$$

in tal caso l'asintoto orizzontale ha equazione

$$y = l$$

Può avvenire, specie per le funzioni trascendenti, che per $x \rightarrow \pm\infty$ si abbiano due valori finiti distinti: in tal caso esistono due asintoti orizzontali, uno destro e uno sinistro.

ASINTOTI OBLIQUI

Una generica funzione $y = f(x)$ ha un asintoto obliquo di equazione

$$y = mx + q$$

se esistono e sono finiti entrambi i seguenti limiti

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \\ \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = q \end{cases}$$

Per le funzioni algebriche fratte si può affermare che ammettono sicuramente un asintoto obliquo se il numeratore è un polinomio di un grado più alto del denominatore.