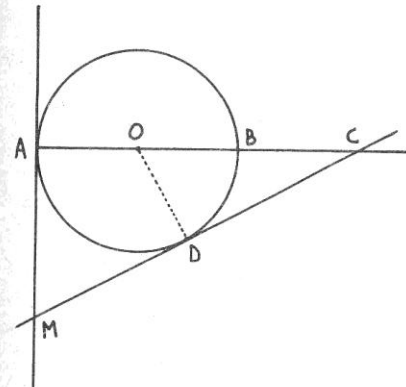


5.

LUGLIO 1975
PRIMO PROBLEMA

ASSEGNATA UNA CIRCONFERENZA DI DIA-
METRO $AB=2$, SI CONDUCA PER A LA RET-
TA TANGENTE E SU ESSA SI CONSIDERI UN
PUNTO M TALE CHE $AM=x$. DA M SI TRACCI
LA ULTERIORE RETTA TANGENTE ALLA CIRCON-
FERENZA E SIA C IL PUNTO IN CUI ESSA
INCONTRA IL PROLUNGAMENTO DI AB.

POSTO $AC=y$, SI ESPRIMA y IN FUN-
ZIONE DI x E SI DISEGNI IL GRAFICO RE-
LATIVO.



$$AB = 2$$

$$AM = x$$

$$AC = y$$

I triangoli ODC e MAC sono simili perché hanno un angolo in comune e un angolo retto, perciò:

$$CD : OD = AC : AM$$

$$CD = \frac{OD \cdot AC}{AM}$$

$$CD = \frac{1 \cdot y}{x} = \frac{y}{x}$$

Poiché $AM = MD$ per un noto teorema sulle tangenti, si ha

$$MD = x$$

e quindi

$$MC = \frac{y}{x} + x$$

Per ottenere la relazione che collega x con y basta applicare il teorema di Pitagora al triangolo MAC

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{y}{x} + x\right)^2$$

$$x^2 + y^2 = \frac{y^2}{x^2} + 2y + x^2$$

$$x^2 y^2 = y^2 + 2x^2 y$$

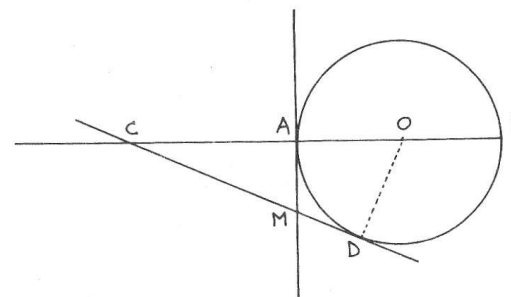
$$y^2(x^2 - 1) = 2x^2 y$$

Sotto la condizione $y \neq 0$, si può dividere per y , ottenendo

$$y(x^2 - 1) = 2x^2$$

$$\boxed{y = \frac{2x^2}{x^2 - 1}} \quad (1)$$

Da notare che per valori di x minori di uno, la figura si modifica nel modo seguente



e perciò y è negativa. D'altronde anche x può assumere valori negativi quando M è in posizione superiore rispetto ad A .

Va quindi escluso solo il caso in cui

$$x = 0 ; y = 0$$

perché contraddice alla condizione sopra enunciata. Per il resto è permesso qualsiasi valore

della x e della y .

Analizziamo ora la funzione (1). Perché

$$f(x) = f(-x)$$

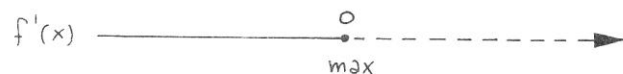
in quanto la x ha solo esponenti pari, la curva è simmetrica rispetto all'asse y .

Calcoliamo la derivata prima

$$y' = \frac{4x(x^2-1) - 2x(2x^2)}{(x^2-1)^2}$$

$$y' = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

Lo studio del segno fornisce



cioè un massimo per $x=0$, con ordinata $y=0$.

La funzione ha due poli (e quindi due asintoti) per

$$x = \pm 1$$

e un asintoto orizzontale di equazione

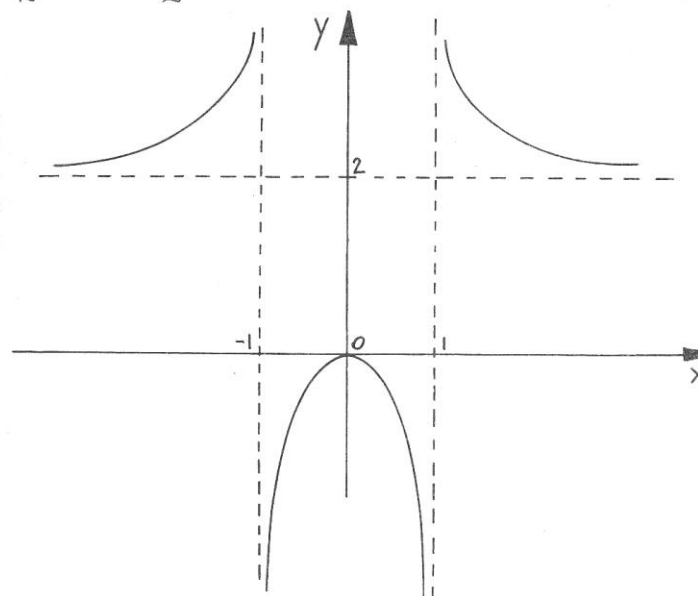
$$y = 2$$

Dallo studio del segno della $f(x)$ si ottiene



che ci permette di stabilire le zone in cui la curva si trova sopra o sotto l'asse x .

Con le informazioni raccolte si può elaborare il grafico seguente



Si ricordi però che il massimo relativo nel=

l'origine non appartiene alla funzione per la condizione posta all'inizio. Dal punto di vista geometrico, in tal caso, il triangolo MAC degenera in un punto.

Il problema poteva anche essere affrontato in modo diverso, continuando a considerare la y positiva nel caso in cui

$$0 < x < 1$$

Si sarebbe ottenuta, in questo intervallo, la nuova funzione

$$y = \frac{2x^2}{1-x^2}$$

Ci è sembrato però più semplice e naturale seguire il criterio precedentemente esposto.