

6.

1975: SECONDO PROBLEMA

IN UN RIFERIMENTO CARTESIANO ORTOGONALE xOy SONO DATE LE PARABOLE C' E C'' RISPETTIVAMENTE DI EQUAZIONE

$$y = -x^2 + 2ax \quad (\text{con } a > 0)$$
$$y = \frac{x^2}{a^4} - \frac{2x}{a^3}$$

SI CALCOLI L'AREA DELLA REGIONE FINITA DI PIANO DELIMITATA DALLE DUE PARABOLE E SI DETERMINI IL VALORE DI a PER CUI TALE AREA RISULTA MINIMA.

SI COMPLETI LA TRATTAZIONE DIMOSTRANDO CHE SE $F(x)$ E' UNA PRIMITIVA DI UNA FUNZIONE $f(x)$ PER $a \leq x \leq b$, RISULTA

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Calcoliamo le coordinate dei punti di intersezione fra le due parabole C' e C'' .
Mettendole a sistema per confronto si ottiene

$$\begin{aligned}
 -x^2 + 2ax &= \frac{x^2}{a^4} - \frac{2x}{a^3} \\
 -a^4x^2 + 2a^5x &= x^2 - 2ax \\
 x^2(1+a^4) - 2ax(1+a^4) &= 0 \\
 x^2 - 2ax &= 0 \\
 x(x-2a) &= 0 \longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2a \end{cases}
 \end{aligned}$$

Le due soluzioni sono

$$A \equiv (0; 0) \quad B \equiv (2a; 0)$$

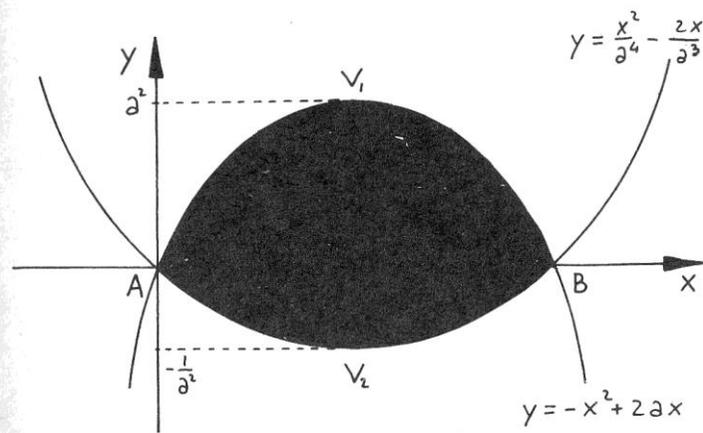
Le coordinate del vertice della C' sono

$$V_1 \equiv \left(\frac{-2a}{-2}; \frac{-4a^2}{-4} \right) \longrightarrow (a; a^2)$$

mentre, per la C'' ,

$$V_2 \equiv \left(\frac{\frac{2}{a^3}}{\frac{2}{a^4}}; \frac{-\frac{4}{a^6}}{\frac{4}{a^4}} \right) \longrightarrow \left(a; -\frac{1}{a^2} \right)$$

Possiamo ora disegnare le due parabole su uno stesso grafico cartesiano, e indicare in quale regione (variabile in dipendenza di a), di cui dobbiamo calcolare l'area



Per il calcolo dell'area si ha

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{2a} (-x^2 + 2ax) dx - \int_0^{2a} \left(\frac{x^2}{a^4} - \frac{2x}{a^3} \right) dx = \\
 &= -\frac{1}{3} [x^3]_0^{2a} + \frac{2a}{2} [x^2]_0^{2a} - \frac{1}{3a^4} [x^3]_0^{2a} + \frac{2}{2a^3} [x^2]_0^{2a} = \\
 &= -\frac{8a^3}{3} + 4a^3 - \frac{8a^3}{3a^4} + \frac{4a^2}{a^3} = \frac{4a^3}{3} - \frac{8}{3a} + \frac{4}{a} = \\
 &= \frac{4a^4 - 8 + 12}{3a} = \frac{4a^4 + 4}{3a} = \frac{4(a^4 + 1)}{3a}
 \end{aligned}$$

Cerchiamo ora il minimo della funzione

$$y = \frac{4(x^4+1)}{3x}$$

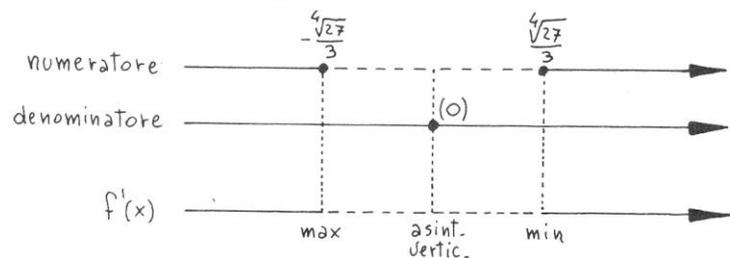
in cui abbiamo scambiato le variabili a ed S ,
con le più familiari x ed y .

La derivata è

$$y' = \frac{16x^3 \cdot 3x - 3 \cdot 4(x^4+1)}{9x^2}$$

$$y' = \frac{4(3x^4-1)}{3x^2}$$

Studiamone il segno



La funzione ha quindi il minimo richiesto per

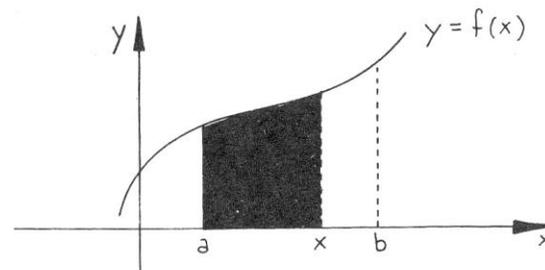
$$a = \frac{4\sqrt{27}}{3}$$

Proseguendo con l'innovazione introdotta nei quesiti del luglio 1974, anche quest'anno si richiede allo studente di affrontare un argomento di carattere teorico.

Poiché la richiesta non è strettamente collegata al contenuto del problema che stiamo trattando, sarebbe forse stato più logico proporre il quesito come problema a se stante.

Vediamo comunque come si poteva rispondere alla domanda.

Se $F(x)$ è una primitiva della $f(x)$, essa può essere considerata come funzione integrale della $f(x)$, cioè l'area della zona colorata con estremo a fisso ed estremo x variabile.



L'area del trapezoide colorato è

$$\int_a^x f(x) dx = F(x) + C$$

Ponendo successivamente $x=a$ e $x=b$, si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^a f(x) dx = F(a) + C \\ \int_a^b f(x) dx = F(b) + C \end{array} \right.$$

Sottraendo membro a membro si ha

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^a f(x) dx = F(b) - F(a)$$

ma il secondo integrale a primo membro corrisponde ad un trapezoide con base nulla, e quindi con area uguale a zero.

Resta perciò

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

che è quanto si voleva dimostrare.