

6.

## 1975: SECONDO PROBLEMA

IN UN RIFERIMENTO CARTESIANO ORTOGONALE  $xOy$  SONO DATE LE PARABOLE  $C'$  E  $C''$  RISPETTIVAMENTE DI EQUAZIONE

$$y = -x^2 + 2ax \quad (\text{con } a > 0)$$

$$y = \frac{x^2}{a^4} - \frac{2x}{a^3}$$

SI CALCOLI L'AREA DELLA REGIONE FINITA DI PIANO DELIMITATA DALLE DUE PARABOLE E SI DETERMINI IL VALORE DI  $a$  PER CUI TALE AREA RISULTA MINIMA.

SI COMPLETI LA TRATTAZIONE DIMOSTRANDO CHE SE  $F(x)$  E' UNA PRIMITIVA DI UNA FUNZIONE  $f(x)$  PER  $a \leq x \leq b$ , RISULTA

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Calcoliamo le coordinate dei punti di intersezione fra le due parabole  $C'$  e  $C''$ .  
Mettendole a sistema per confronto si ottiene

$$\begin{aligned}
 -x^2 + 2ax &= \frac{x^2}{a^4} - \frac{2x}{a^3} \\
 -a^4x^2 + 2a^5x &= x^2 - 2ax \\
 x^2(1+a^4) - 2ax(1+a^4) &= 0 \\
 x^2 - 2ax &= 0 \\
 x(x-2a) &= 0 \longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2a \end{cases}
 \end{aligned}$$

Le due soluzioni sono

$$A \equiv (0; 0) \quad B \equiv (2a; 0)$$

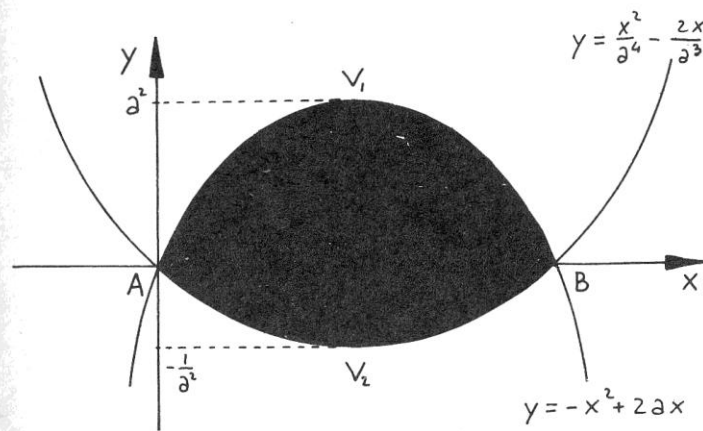
Le coordinate del vertice della  $C'$  sono

$$V_1 \equiv \left( \frac{-2a}{-2} ; \frac{-4a^2}{-4} \right) \longrightarrow (a; a^2)$$

mentre, per la  $C''$ ,

$$V_2 \equiv \left( \frac{\frac{2}{a^3}}{\frac{2}{a^4}} ; \frac{-\frac{4}{a^6}}{\frac{4}{a^4}} \right) \longrightarrow \left( a; -\frac{1}{a^2} \right)$$

Possiamo ora disegnare le due parabole su uno stesso grafico cartesiano, e indicare in quale la regione (variabile in dipendenza di  $a$ ), di cui dobbiamo calcolare l'area



Per il calcolo dell'area si ha

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{2a} (-x^2 + 2ax) dx - \int_0^{2a} \left( \frac{x^2}{a^4} - \frac{2x}{a^3} \right) dx = \\
 &= -\frac{1}{3} [x^3]_0^{2a} + \frac{2a}{2} [x^2]_0^{2a} - \frac{1}{3a^4} [x^3]_0^{2a} + \frac{2}{2a^3} [x^2]_0^{2a} = \\
 &= -\frac{8a^3}{3} + 4a^3 - \frac{8a^3}{3a^4} + \frac{4a^2}{a^3} = \frac{4a^3}{3} - \frac{8}{3a} + \frac{4}{a} = \\
 &= \frac{4a^4 - 8 + 12}{3a} = \frac{4a^4 + 4}{3a} = \frac{4(a^4 + 1)}{3a}
 \end{aligned}$$

Cerchiamo ora il minimo della funzione

$$y = \frac{4(x^4+1)}{3x}$$

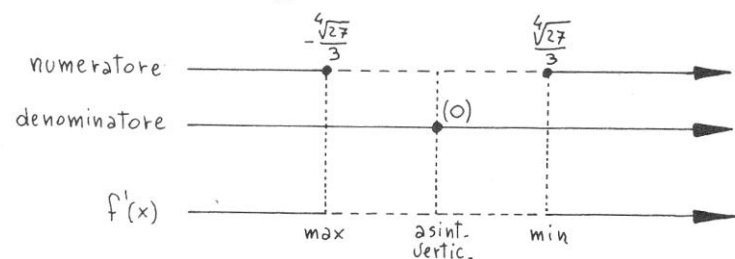
in cui abbiamo scambiato le variabili  $a$  ed  $S$ ,  
con le più familiari  $x$  ed  $y$ .

La derivata è

$$y' = \frac{16x^3 \cdot 3x - 3 \cdot 4(x^4+1)}{9x^2}$$

$$y' = \frac{4(3x^4-1)}{3x^2}$$

Studiamone il segno



La funzione ha quindi il minimo richiesto per

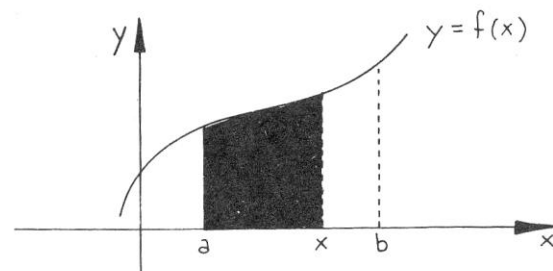
$$a = \frac{\sqrt[4]{27}}{3}$$

Proseguendo con l'innovazione introdotta nei quesiti del luglio 1974, anche quest'anno si richiede allo studente di affrontare un argomento di carattere teorico.

Poiché la richiesta non è strettamente collegata al contenuto del problema che stiamo trattando, sarebbe forse stato più logico proporre il quesito come problema a se stante.

Vediamo comunque come si poteva rispondere alla domanda.

Se  $F(x)$  è una primitiva della  $f(x)$ , essa può essere considerata come funzione integrale della  $f(x)$ , cioè l'area della zona colorata con estremo  $a$  fisso ed estremo  $x$  variabile.



L'area del trapezoide colorato è

$$\int_a^x f(x) dx = F(x) + C$$

Ponendo successivamente  $x=a$  e  $x=b$ , si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^a f(x) dx = F(a) + C \\ \int_a^b f(x) dx = F(b) + C \end{array} \right.$$

Sottraendo membro a membro si ha

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^a f(x) dx = F(b) - F(a)$$

ma il secondo integrale a primo membro corrisponde ad un trapezoide con base nulla, e quindi con area uguale a zero.

Resta perciò

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

che è quanto si voleva dimostrare.