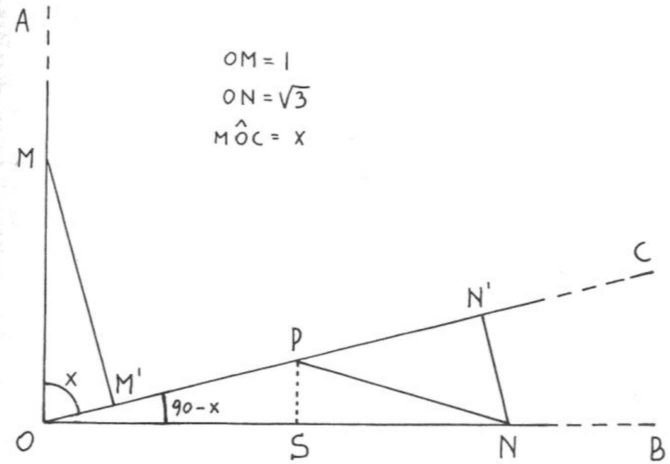
7.

1975: TERZO PROBLEMA

SI CONDUCA INTERNAMENTE AD UN ANGOLO RETTO $A\hat{O}B$ UNA SEMIRETTA OC CHE FORMA CON OA UN ANGOLO $A\hat{O}C = x$; PRESI RISPETTIVAMENTE SU OA ED OB DUE PUNTI M ED N TALI CHE $OM = 1$, $ON = \sqrt{3}$, SIANO M' ED N' LE RISPETTIVE PROIEZIONI DI M ED N SU OC. DETTO P IL PUNTO MEDIO DI M'N', SI DETERMINI x IN MODO CHE RISULTI MASSIMA L'AREA DEL TRIANGOLO NOP.



Nel triangolo rettangolo OMM', e'

$$\frac{OM'}{OM} = \cos x \longrightarrow OM' = OM \cdot \cos x \longrightarrow OM' = \cos x$$

e nel triangolo rettangolo ONN', similmente,

$$\frac{ON'}{ON} = \cos(90 - x)$$

$$ON' = ON \cdot (\cos 90 \cos x + \operatorname{sen} 90 \operatorname{sen} x) = \sqrt{3} \operatorname{sen} x$$

Poiche' P e' punto medio fra OM' e ON', si ha

$$OP = \frac{OM' + ON'}{2}$$

cioe'

$$OP = \frac{\cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x}{2}$$

Consideriamo ora il triangolo rettangolo OPS. Avremo

$$\frac{PS}{OP} = \operatorname{sen}(90 - x)$$

cioe'

$$PS = OP \cdot (\operatorname{sen} 90 \cos x - \cos 90 \operatorname{sen} x)$$

$$\boxed{PS = \frac{\cos^2 x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x}{2}}$$

L'area del triangolo QPN e' percio'

$$S = \frac{ON \cdot PS}{2}$$

$$S = \sqrt{3} \cdot \frac{\cos^2 x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

La funzione da massimizzare e' quindi la seguente

$$\boxed{y = \frac{\sqrt{3} \cos^2 x + 3 \operatorname{sen} x \cos x}{4}}$$

con

$$\boxed{0 < x < \frac{\pi}{2}} \qquad (1)$$

Calcoliamo la derivata prima

$$y' = \frac{1}{4} \left(-2\sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x + 3 \cos^2 x - 3 \operatorname{sen}^2 x\right)$$

$$y' = \frac{1}{4} \left[-2\sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x + 3 (1 - 2 \operatorname{sen}^2 x)\right]$$

$$y' = \frac{1}{4} \left(-\sqrt{3} \operatorname{sen} 2x + 3 \cos 2x\right)$$

$$y' = \frac{3 \cos 2x - \sqrt{3} \operatorname{sen} 2x}{4}$$

Essa si annulla per

$$3 \cos 2x - \sqrt{3} \operatorname{sen} 2x = 0$$

$$\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + K\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + K\frac{\pi}{2}$$

a causa della limitazione (1), l'unica soluzione accettabile è

$$\boxed{x = 30°}$$

Calcoliamo la derivata seconda per verificare che in tale punto la funzione abbia effettivamente un massimo.

$$y'' = -\frac{3 \operatorname{sen} 2x + \sqrt{3} \cos 2x}{2}$$

e poichè

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} < 0$$

il punto suddetto è proprio il massimo cercato.