

8.

LUGLIO 1976
PRIMO PROBLEMA

IN UN SISTEMA DI ASSI COORDINATI CARTESIANE SI STUDI LA FUNZIONE

$$y = \frac{2x-1}{2x^3}$$

E SE NE DISEGNI IL GRAFICO.

SI DETERMININO I COEFFICIENTI DELL'EQUAZIONE

$$y = ax^2 + bx$$

IN MODO CHE LA PARABOLA DA ESSA RAPPRESENTATA PASSI PER IL FLESSO E PER L'ULTERIORE PUNTO DI INTERSEZIONE DELLA CURVA CON LA TANGENTE INFLESSIONALE E SI CALCOLI L'AREA DELLA REGIONE FINITA DI PIANO DELIMITATA DALLE DUE CURVE.

La funzione è algebrica razionale fratta ed è di quarto grado (quindi una retta generica potrà tagliarla al massimo in quattro punti).

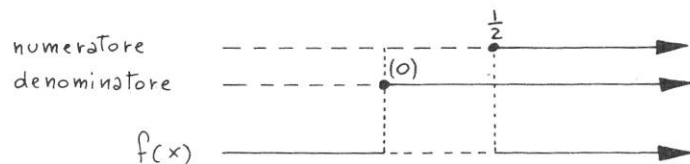
Poiché il denominatore si annulla per $x=0$ c'è un asintoto verticale coincidente con l'asse y .

Essendo inoltre

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{2x^3} = 0$$

anche l'asse x costituisce un asintoto orizzontale.

Lo studio del segno della $f(x)$ fornisce



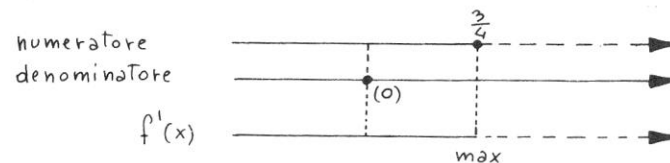
da cui si ricavano le zone in cui la curva si trova sopra o sotto l'asse x .

La derivata prima è

$$y' = \frac{3-4x}{2x^4}$$

studiandone il segno si ottengono le ascisse dei punti di massimo, minimo e flessi orizzontali.

Nel nostro caso si ha



Risulta un solo punto di massimo con coordinate

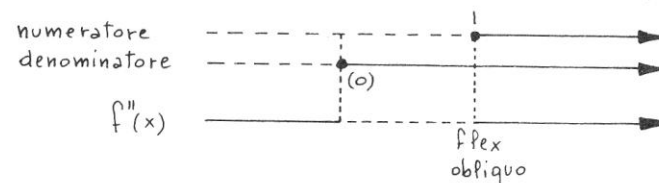
$$M \equiv \left(\frac{3}{4} ; \frac{16}{27} \right)$$

Calcoliamo la derivata seconda

$$y'' = \frac{6(x-1)}{x^5}$$

e studiamone il segno. Individueremo così le zone in cui la curva ha la concavità verso l'alto o verso il basso, e quindi i punti di flesso.

Si ha



Risulta un solo flesso con coordinate

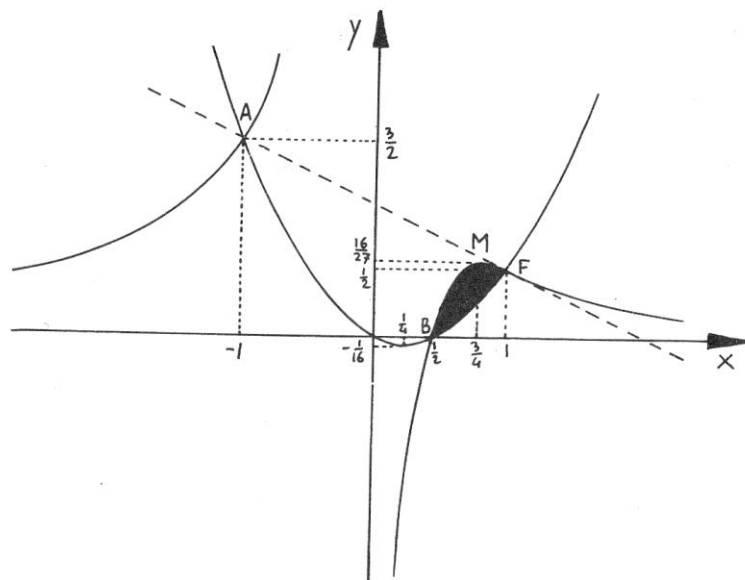
$$F \equiv \left(1 ; \frac{1}{2} \right)$$

La tangente inflessionale ha un coefficiente angolare pari a

$$f'(1) = -\frac{1}{2}$$

e quindi la sua equazione è

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$



Mettiamo a sistema la funzione con la tangente inflessionale

$$\begin{cases} y = \frac{2x-1}{2x^3} \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$$

uguagliando i due secondi membri si ha

$$x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$$

Scomponendo in fattori con la divisione di Ruffini, si ha

$$(x-1)^3(x+1) = 0$$

cioè una soluzione tripla per $x=1$ (che è l'ascissa del punto di flesso, già noto) e una soluzione singola $x=-1$.

Quindi l'ulteriore punto di intersezione ha coordinate

$$A \equiv (-1; \frac{3}{2})$$

Imponiamo ora alla parabola generica

$$y = ax^2 + bx$$

di passare per i punti A ed F. Si ottiene

$$\begin{cases} \frac{3}{2} = a - b \\ \frac{1}{2} = a + b \end{cases}$$

da cui $a = 1 \quad b = -\frac{1}{2}$

quindi la parabola richiesta ha equazione

$$y = x^2 - \frac{x}{2}$$

con vertice nel punto

$$V \equiv \left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{16}\right)$$

Con facili passaggi si può ricadare che essa taglia la funzione, oltre che nei punti A ed F, anche nel punto

$$B \equiv \left(\frac{1}{2}; 0\right)$$

Rimane da calcolare l'area della regione colorata. Per essa si ottiene

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\frac{2x-1}{2x^3} - \left(x^2 - \frac{x}{2}\right) \right] dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^3} - x^2 + \frac{x}{2} \right) dx$$

$$= \left[-x^{-1} + \frac{x^{-2}}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = -\frac{5}{6} + \frac{47}{48} = \frac{7}{48}$$