

9.

1976: SECONDO PROBLEMA

SI STUDI LA FUNZIONE

$$y = x + 2 \sin x$$

E SE NE DISEGNI IL GRAFICO NELL'INTERVALLO

$$-2\pi \leq x \leq 2\pi$$

SI DETERMININO LE COORDINATE DEI PUNTI COMUNI ALLA CURVA ED ALLA RETTA DI EQUAZIONE

$$y = x - 2$$

E SI CALCOLI L'AREA DELLA REGIONE DI PIANO DELIMITATA DALLA CURVA E DALLA RETTA NELL'INTERVALLO INDICATO.

La funzione è trascendente intera e definita per ogni x reale.

Passa per l'origine e non ha asintoti di alcun tipo.

Calcoliamo la derivata prima e determiniamo

i suoi zeri

$$y' = 1 + 2 \cos x$$

$$1 + 2 \cos x = 0$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2K\pi \quad \text{con } K \text{ intero relativo}$$

Nell'intervallo compreso fra -2π e 2π si hanno quindi le quattro soluzioni

$$x = -\frac{4}{3}\pi \quad x = -\frac{2}{3}\pi \quad x = \frac{2}{3}\pi \quad x = \frac{4}{3}\pi$$

corrispondenti ad altrettanti punti caratteristici che possono essere riconosciuti ricorrendo alla derivata seconda

$$y'' = -2 \sin x$$

Si ottiene

$$f''(-\frac{4}{3}\pi) = -\sqrt{3} < 0 \quad f''(-\frac{2}{3}\pi) = \sqrt{3} > 0$$

$$f''(\frac{2}{3}\pi) = -\sqrt{3} < 0 \quad f''(\frac{4}{3}\pi) = \sqrt{3} > 0$$

e quindi due punti di massimo e due di mi-

nimo con coordinate

$$A \equiv (-\frac{4}{3}\pi; \sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi) \quad \text{max}$$

$$B \equiv (-\frac{2}{3}\pi; -\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}) \quad \text{min}$$

$$C \equiv (\frac{2}{3}\pi; \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}) \quad \text{max}$$

$$D \equiv (\frac{4}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}) \quad \text{min}$$

Determiniamo ora le intersezioni fra la funzione e la retta, mettendo a sistema le equazioni corrispondenti

$$\begin{cases} y = x + 2 \sin x \\ y = x - 2 \end{cases}$$

Si ottiene

$$\sin x = -1$$

$$x = \frac{3}{2}\pi + 2K\pi$$

che, nell'intervallo considerato, si riducono alle due soluzioni

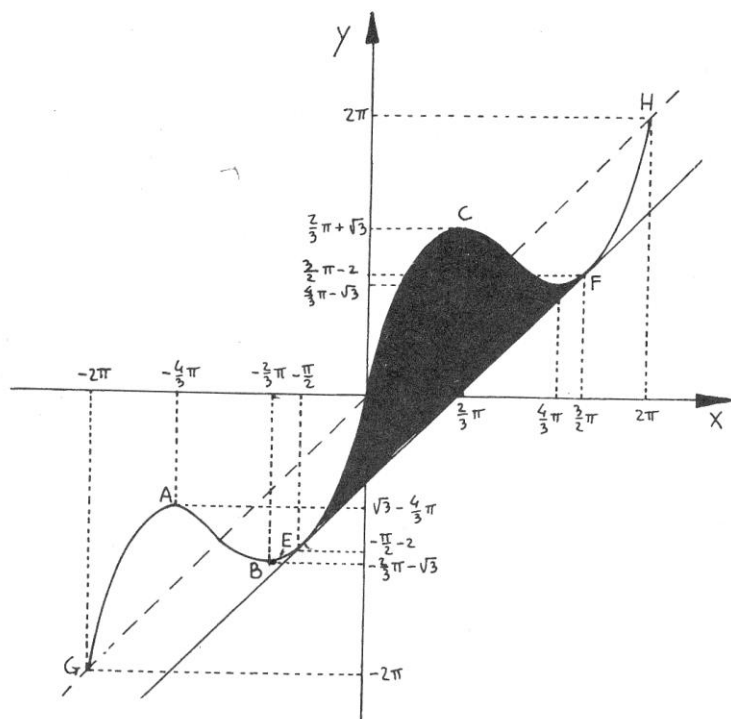
$$x = -\frac{\pi}{2} \quad x = \frac{3}{2}\pi$$

Sostituendo questi valori nell'equazione della

retta, si ricavano le ordinate dei due punti di intersezione fra funzione e retta. Le coordinate complete di tali punti sono

$$E \equiv \left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} - 2\right) \quad F \equiv \left(\frac{3}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi - 2\right)$$

Il grafico che ne risulta è il seguente



L'area della regione tratteggiata è la seguente

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} [x + 2 \sin x - (x - 2)] dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (2 \sin x + 2) dx \\ &= 2 \left[-\cos x + x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = 2 \left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{2} \right) = 4\pi \end{aligned}$$