

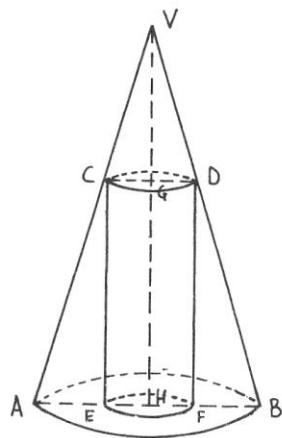
10.

1976: TERZO PROBLEMA

IN UN CONO CIRCOLARE RETTO AVENTE PER RAGGIO DI BASE E PER ALTEZZA RISPETTIVAMENTE I SEGMENTI r ED hr SI INSCRIVA IL CILINDRO AVENTE LA BASE SUL PIANO DI BASE DEL CONO ED IL VOLUME MASSIMO

PER QUALE VALORE DI h TALE CILINDRO RISULTA ANCHE EQUILATERO?

IN QUESTO CASO PARTICOLARE SI TROVI ANCHE IL CILINDRO INSCRITTO PER IL QUALE E' MASSIMA LA SUPERFICIE TOTALE.



$$\begin{cases} HB = r \\ VH = hr \end{cases}$$

Il volume del cilindro e'

$$V = \pi \cdot HF^2 \cdot GH$$

Ponendo

$$HF = x$$

poiche' i triangoli VGD e VHB sono simili, si ricava

$$VG : GD = VH : HB$$

$$VG = \frac{GD \cdot VH}{HB}$$

cioe'

$$VG = \frac{hrx}{r} = hx$$

Quindi

$$GH = VH - VG = hr - hx = h(r - x)$$

e il volume del cilindro e'

$$V = \pi x^2 \cdot h(r - x)$$

o anche

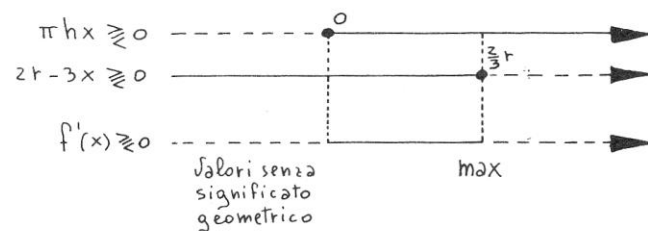
$$y = -\pi h x^3 + \pi h r x^2$$

dove abbiamo indicato il volume con la y , e rappresenta la funzione da massimizzare.

Calcoliamo la derivata prima e studiamone il segno

$$y' = -3\pi h x^2 + 2\pi h r x$$

$$y' = \pi h x (2r - 3x)$$



Dunque il cilindro ha volume massimo per

$$HF = \frac{2}{3}r$$

Il cilindro (di volume massimo) è equilatero quando

$$CD = GH$$

cioè quando

$$2 \cdot \frac{2}{3}r = h \left(r - \frac{2}{3}r \right)$$

$$\frac{4}{3}r = h \frac{r}{3}$$

$$h = 4$$

La superficie totale del cilindro è data dalla formula

$$S = 2\pi \cdot HF \cdot GH + 2\pi \cdot HF^2$$

cioè

$$S = 2\pi x \cdot h(r-x) + 2\pi x^2$$

che, per $h=4$, diviene

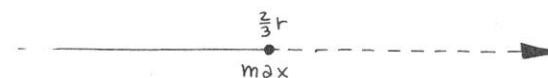
$$y = 8\pi x(r-x) + 2\pi x^2$$

$$y = -6\pi x^2 + 8\pi r x$$

La derivata prima è

$$y' = -12\pi x + 8\pi r$$

il cui studio del segno fornisce



cioè un massimo per

$$HF = \frac{2}{3}r$$

stesso valore per cui anche il volume è massimo.