12.

LUGLIO 1977

PRIMO PROBLEMA

IN UN SISTEMA DI ASSI COORDINATI CARTESIANI SI CONSIDERINO LE PARABOLE RAPPRESENTATE DALLE EQUAZIONI

$$y = 3x - x^2 \qquad y = x^2 - 2x$$

NELLA REGIONE FINITA DI PIANO DELIMITATA DALLE DUE CURVE SI DETERMINI IL TRIANGOLO AVENTE UN VERTICE NEL PUNTO COMUNE ALLE DUE CURVE DIVERSO DALL'ORIGINE ED IL LATO OPPOSTO PARALLELO ALL'ASSE DELLE ORDINATE E LA CUI AREA ABBIA VALORE MASSIMO.

SI CALCOLINO INOLTRE LE AREE DELLE REGIONI FINITE LIMITATE DAI LATI DI QUESTO TRIANGOLO E DALLE CURVE STESSE.

La prima parabola $y = -x^2 + 3x$ ha la concavità rivolta verso il basso, vertice nel punto

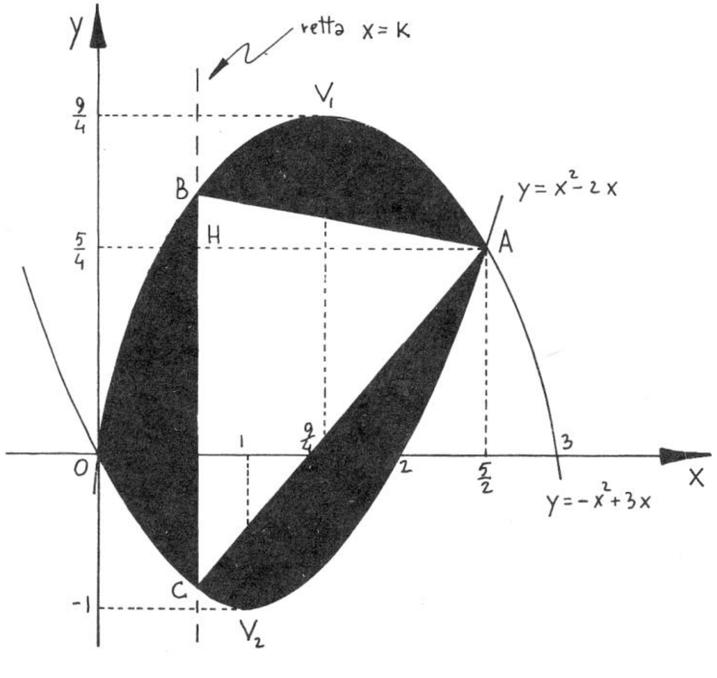
$$V_1 \equiv \left(\frac{3}{2} ; \frac{9}{4}\right)$$

e taglia l'asse x nei punti di ascissa 0 e 3.

La seconda parabola $y = x^2 - 2x$ ha invece la concavità rivolta verso l'alto, vertice nel punto

$$V_2 \equiv (1\,;\,-1)$$

e taglia l'asse x nei punti di ascissa 0 e 2.



Determiniamo le coordinate del punto di intersezione A

$$\begin{cases} y = -x^2 + 3x \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$$

$$-x^2 + 3x = x^2 - 2x$$

$$2x^2 - 5x = 0$$

$$x(2x - 5) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 & \longrightarrow & y = 0 & \text{coord. dell'origine} \\ x = \frac{5}{2} & \longrightarrow & y = \frac{5}{4} & \text{coord. del punto A} \end{cases}$$

Tracciando la retta verticale di equazione $x = K$ si determina il triangolo ABC.

Mettendo a sistema tale retta con ciascuna delle due parabole, si ottengono le coordinate dei punti B e C.

$$B \equiv (K\,;\,3K - K^2)$$

$$C \equiv (K\,;\,K^2 - 2K)$$

e quindi si ha

$$BC = 3K - K^2 - (K^2 - 2K)$$

$$\boxed{BC = K(5-2K)}$$

E' inoltre

$$\boxed{AH = \frac{5}{2} - K}$$

e quindi l'area del triangolo ABC è

$$S = K(5-2K) \cdot \frac{5-2K}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{K(5-2K)^2}{4}$$

Usando le variabili x e y, più consuete, dobbiamo ora massimizzare la funzione

$$y = \frac{x(5-2x)^2}{4}$$

in cui, per ragioni geometriche, deve essere

$$0 < x < \frac{5}{2}$$

La derivata prima è

$$y' = \frac{1 \cdot (5-2x)^2}{4} + \frac{x \cdot 2(5-2x) \cdot (-2)}{4}$$

$$y' = \frac{12x^2 - 40x + 25}{4}$$

Studiandone il segno si ha

$f'(x)$ $\quad \frac{5}{6}$ max $\quad \frac{5}{2}$ (da scartare)

e perciò il triangolo ABC ha area massima per

$$\boxed{K = \frac{5}{6}}$$

Passiamo ora al calcolo delle superfici colorate S_1, S_2, S_3, corrispondenti al caso in cui il triangolo ABC ha area massima.

Cominciamo dall'ultima, perchè più breve

$$S_3 = \int_0^{\frac{5}{6}} \left[3x - x^2 - (x^2 - 2x)\right] dx = \int_0^{\frac{5}{6}} (-2x^2 + 5x)\, dx =$$

$$= \left[-2\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{5}{6}} = -\frac{125}{324} + \frac{125}{72} = \frac{875}{648}$$

Per il calcolo di S_1 occorre prima determinare l'equazione della retta passante per A e B, che è

$$A \equiv \left(\frac{5}{2}; \frac{5}{4}\right) \quad B \equiv \left(\frac{5}{6}; \frac{65}{36}\right) \longrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{25}{12}$$

e perciò

$$S_1 = \int_{\frac{5}{6}}^{\frac{5}{2}} \left[-x^2+3x-\left(-\frac{1}{3}x+\frac{25}{12}\right)\right]dx = \int_{\frac{5}{6}}^{\frac{5}{2}} \left(-x^2+\frac{10}{3}x-\frac{25}{12}\right)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{3}-\frac{25x}{12}\right]_{\frac{5}{6}}^{\frac{5}{2}} = \dots = \frac{125}{162}$$

Anche per S_2 determiniamo prima l'equazione della retta passante per A e C.

$$A \equiv \left(\frac{5}{2};\frac{5}{4}\right) \quad C \equiv \left(\frac{5}{6};-\frac{35}{36}\right) \longrightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{25}{12}$$

e quindi

$$S_2 = \int_{\frac{5}{6}}^{\frac{5}{2}} \left[\frac{4}{3}x-\frac{25}{12}-\left(x^2-2x\right)\right]dx = \int_{\frac{5}{6}}^{\frac{5}{2}} \left(-x^2+\frac{10}{3}x-\frac{25}{12}\right)dx =$$

$$= \frac{125}{162}$$

in quanto sia funzione integranda che estremi di integrazione sono uguali a quelli del calcolo di S_1.