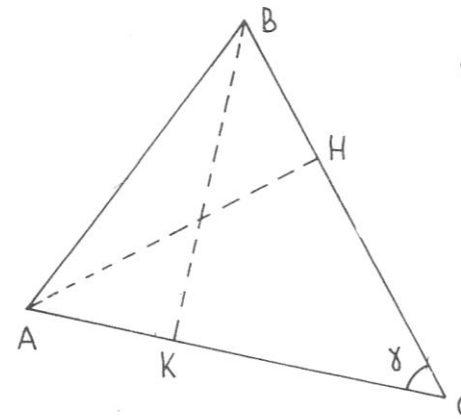


13.

1977: SECONDO PROBLEMA

I TRE PUNTI A, B, C , NON ALLINEATI, SONO VERTICI DI UN TRIANGOLO ABC I CUI LATI BC E CA SONO LUNGI RISPETTIVAMENTE a, b . SI DICA COME DEVE ESSERE SCELTO L'ANGOLO $\widehat{ACB} = \gamma$ AFFINCHÉ LA SOMMA DEI QUADRATI DELLE ALTEREZZE DEL TRIANGOLO RELATIVE AI LATI BC E CA , DIMINUITA DEL QUADRATO DEL LATO AB , SIA MASSIMA. POSTO $b = ma$ ($m > 0$), SI DETERMINI PER QUALE VALORE DI m TALE ANGOLO ASSUME AMPIEZZA MINIMA.



Sono noti

$$BC = a$$

$$AC = b$$

e deve essere

$$0^\circ < \gamma < 180^\circ$$

Valgono le seguenti espressioni

$$\begin{cases} \frac{AH}{AC} = \sin \gamma \\ \frac{BK}{BC} = \sin \gamma \end{cases} \rightarrow \begin{cases} AH = b \cdot \sin \gamma \\ BK = a \cdot \sin \gamma \end{cases}$$

o anche, quadrando i membri,

$$\begin{cases} AH^2 = b^2 \sin^2 \gamma \\ BK^2 = a^2 \sin^2 \gamma \end{cases} \quad (1)$$

Inoltre, per il teorema di Carnot, si ha

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad (2)$$

Possiamo ora applicare la relazione fornita dal testo

$$y = AH^2 + BK^2 - AB^2$$

sostituendo in essa le (1) e (2):

$$y = b^2 \sin^2 \gamma + a^2 \sin^2 \gamma - a^2 - b^2 + 2ab \cos \gamma$$

$$y = \sin^2 \gamma (a^2 + b^2) + 2ab \cos \gamma - a^2 - b^2$$

È questa la funzione da massimizzare. Calcoliamo la derivata prima (ricordando che γ è la variabile indipendente, mentre a e b sono costanti)

$$y' = 2 \sin \gamma \cos \gamma (a^2 + b^2) - 2ab \sin \gamma$$

Fattorizzando e uguagliando a zero si ha

$$2 \sin \gamma [\cos \gamma (a^2 + b^2) - ab] = 0$$

le cui soluzioni sono

$$\sin \gamma = 0 \rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \gamma = \pi \end{cases} \quad \text{entrambe da scartare perché risulterebbero } A, B, C \text{ allineati}$$

$$\cos \gamma = \frac{ab}{a^2 + b^2} \rightarrow \gamma = \arccos \frac{ab}{a^2 + b^2} \quad (3)$$

Quest'ultima soluzione è accettabile perché la frazione

$$\frac{ab}{a^2 + b^2}$$

è contemporaneamente maggiore di zero (in quanto $a > 0, b > 0$) e minore di uno. Infatti

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

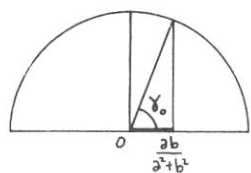
e quindi a maggior ragione

$$a^2 + b^2 > 2ab$$

da cui si ricava, appunto,

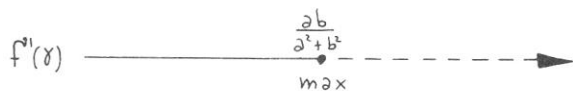
$$\frac{ab}{a^2 + b^2} < 1$$

Studiamo ora il segno della derivata prima:



$$\begin{cases} \text{Per angoli} < \gamma_0 \rightarrow \cos \gamma > \frac{ab}{a^2 + b^2} \\ \text{Per angoli} > \gamma_0 \rightarrow \cos \gamma < \frac{ab}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Perciò



Dunque la (3) rappresenta il valore di γ per cui la relazione proposta ha un massimo.

Poniamo ora $b = ma$ (con $m > 0$) nella relazione

$$\cos \gamma = \frac{ab}{a^2 + b^2}$$

Si ottiene

$$\cos \gamma = \frac{ma^2}{a^2 + m^2a^2} \longrightarrow \cos \gamma = \frac{m}{1 + m^2}$$

che è la funzione da minimizzare.

Ricordiamo però che l'angolo γ può variare fra 0° e 180° , e che in questo intervallo all'aumentare di γ il $\cos \gamma$ è sempre decrescente.

Quindi se poniamo

$$\begin{cases} \cos \gamma = y \\ m = x \end{cases}$$

si ha la funzione

$$y = \frac{x}{1+x^2} \quad (4)$$

e il valore minimo di γ corrisponde ad un massimo per la funzione (4).

Essa passa per l'origine ed ha un solo asintoto orizzontale coincidente con l'asse x . La derivata è

$$y' = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

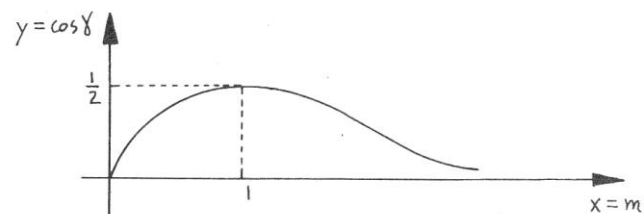
$$y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

Studiamone il segno (del solo numeratore in quanto il denominatore è sempre positivo)



I valori negativi non sono permessi perché deve essere $m > 0$.

Il grafico della (4) è allora il seguente



La (4) ammette un massimo, in corrispondenza del quale

$$\cos \gamma = \frac{1}{2}$$

e quindi

$$\gamma = 60^\circ$$

è il valore minimo cercato.