17.

LUGLIO 1978

PRIMO PROBLEMA

IN UN SISTEMA DI ASSI COORDINATI CAR= TESIANI SI CONSIDERINO LE PARABOLE RIS= PETTIVAMENTE DI EQUAZIONE

$$C' \qquad y = 2x - 2x^2$$

$$C'' \qquad y = x - x^2$$

NELLA REGIONE FINITA DI PIANO DELIMI= TATA DALLE DUE CURVE SI CONDUCANO: LA RETTA DI EQUAZIONE

$$y = K \qquad \left(K > \frac{1}{4}\right)$$

SULLA QUALE C' INTERCETTA LA CORDA AB; LA RETTA TANGENTE A C'' NEL SUO VERTICE SULLA QUALE LA STESSA C' INTERCETTA LA CORDA CD. SI DETERMINI PER QUALE VA= LORE DI K L'AREA DEL TRAPEZIO ABCD ACQUISTA IL VALORE MASSIMO.

Entrambe le parabole

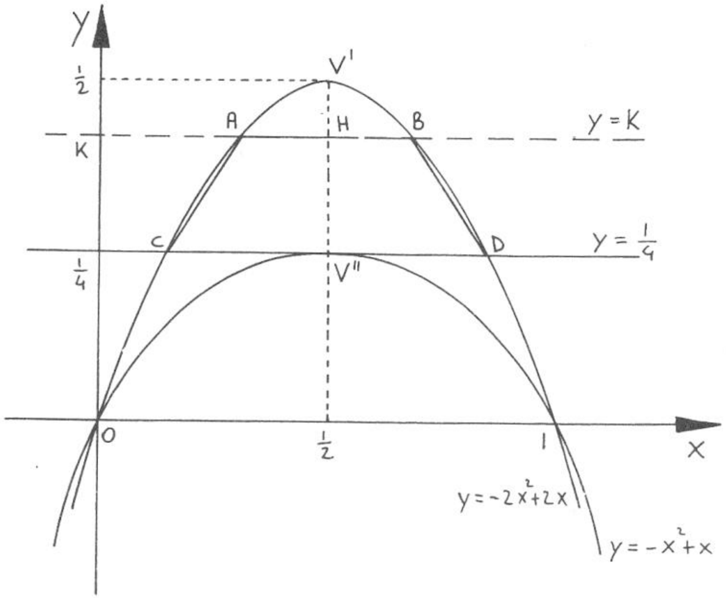
$$y = -2x^2 + 2x \qquad\qquad y = -x^2 + x$$

hanno asse verticale e tagliano l'asse x nei punti di coordinate $(0;0)$ e $(1;0)$.

Le coordinate dei vertici sono rispettivamente

$$V' \equiv \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \qquad V'' \equiv \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$$

Si ha quindi il grafico



Determiniamo le coordinate dei punti C e D ponendo a sistema la retta $y = \frac{1}{4}$ con la C'

$$\frac{1}{4} = -2x^2 + 2x$$

$$8x^2 - 8x + 1 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}$$

e quindi

$$C \equiv \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}; \frac{1}{4}\right) \qquad D \equiv \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}; \frac{1}{4}\right)$$

e quelle dei punti A e B ponendo a sistema la retta $y = K$ con la C''

$$K = -2x^2 + 2x$$

$$2x^2 - 2x + K = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-2K}}{2}$$

quindi

$$A \equiv \left(\frac{1-\sqrt{1-2K}}{2}; K\right) \qquad B \equiv \left(\frac{1+\sqrt{1-2K}}{2}; K\right)$$

Dove la radice è reale per $K \leq \frac{1}{2}$ e perciò la retta $y = K$ non può superare V'.

Calcoliamo ora la lunghezza delle basi del trapezio e la sua altezza.

$$\begin{cases} AB = \dfrac{1+\sqrt{1-2K}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{1-2K}}{2} = \sqrt{1-2K} \\ CD = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4} - \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ HV'' = K - \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

E dunque l'area del trapezio è

$$S = \left(\sqrt{1-2K} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(K - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

o anche, semplificando e usando le consuete va= riabili x e y

$$\boxed{y = \left(\sqrt{1-2x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{4x-1}{8}\right)}$$

che rappresenta la funzione da massimizzare.

La derivata prima è

$$y' = \frac{-2}{2\sqrt{1-2x}}\left(\frac{4x-1}{8}\right) + \left(\sqrt{1-2x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

cioè

$$y' = \frac{1-4x}{8\sqrt{1-2x}} + \frac{\sqrt{1-2x}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$y' = \frac{1-4x+4(1-2x)+2\sqrt{2}\sqrt{1-2x}}{8\sqrt{1-2x}}$$

$$y' = \frac{5-12x+2\sqrt{2-4x}}{8\sqrt{1-2x}}$$

Con la condizione già vista il denomina= tore è sempre positivo. È quindi suffi= ciente studiare il segno del solo numeratore

$$5 - 12x + 2\sqrt{2-4x} \geq 0$$

cioè

$$5 - 12x \geq -2\sqrt{2-4x}$$

$$\boxed{12x - 5 \leq 2\sqrt{2-4x}} \qquad (1)$$

Si ricorda che le disequazioni irrazionali del tipo

$$f(x) \leq \sqrt{g(x)}$$

ammettono come soluzioni quelle provenienti da uno dei due sistemi

$$\begin{cases} [f(x)]^2 \leq g(x) \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Nel nostro caso si ha

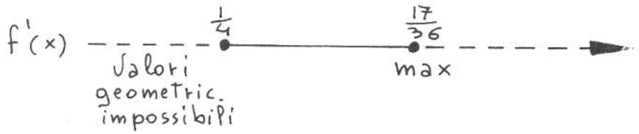
$$\begin{cases} 144x^2 - 120x + 25 \leq 4(2-4x) \\ 12 - 5x \geq 0 \\ 2 - 4x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 12 - 5x < 0 \\ 2 - 4x \geq 0 \end{cases}$$

Il primo sistema ammette soluzioni per

$$\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{17}{36}$$

mentre il secondo sistema non ha soluzioni.

Quindi per lo studio del segno della derivata prima, si ha



Il trapezio ha dunque area massima per

$$\boxed{K = \frac{17}{36}}$$