17.

1978: SECONDO PROBLEMA

SI STUDI LA FUNZIONE

$$y = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$$

E SE NE DISEGNI IL GRAFICO. SI SCRIVA L'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA TANGENTE AI TRE RAMI DELLA CURVA E SI CALCOLINO IL PERIMETRO E L'AREA DEL TRIANGOLO INDIVIDUATO DAI TRE PUNTI DI CONTATTO.

La funzione è razionale fratta di terzo grado, ed è simmetrica rispetto all'asse y perché

$$f(x) = f(-x)$$

Vi sono due asintoti verticali in corrispondenza dei due poli $x = \pm 1$, ed un asintoto orizzontale a quota -1 perché

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + x^2}{1 - x^2} = -1$$

La derivata prima è

$$y' = \frac{2x(1-x^2)+2x(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$$

$$y' = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

e lo studio del segno fornisce

$$f'(x) \quad - - - \underset{(-1)}{\bullet} - - - \underset{\text{min}}{\overset{0}{\bullet}} \text{———} \underset{(1)}{\bullet} \text{———}\rightarrow$$

C'è quindi un solo minimo di coordinate

$$A \equiv (0;1)$$

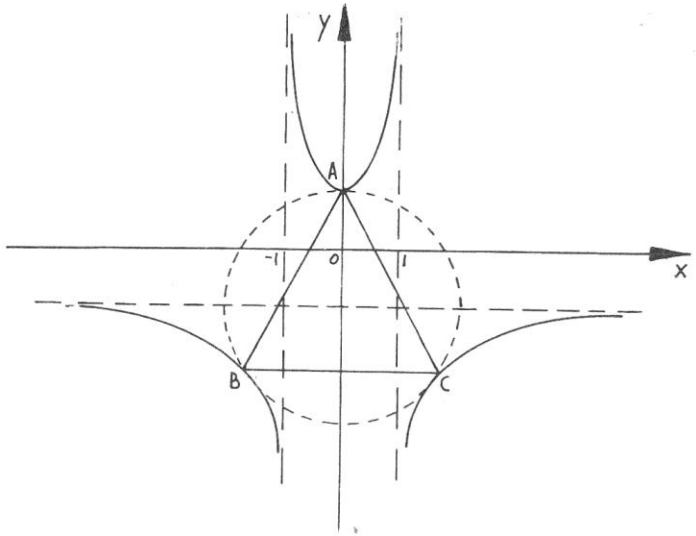
Il grafico della curva è disegnato nella pagina seguente.

A causa della simmetria della curva rispetto all'asse y, il centro della circonferenza tangente ai tre rami deve trovarsi necessariamente sull'asse y.

Quindi la circonferenza avrà equazione generica

$$x^2+y^2+by+c=0$$

Mettendo a sistema tale equazione con la funzione data, si ha



$$\begin{cases} x^2+y^2+by+c=0 \\ y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \\ y-x^2y=1+x^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \\ x^2=\dfrac{y-1}{y+1} \end{cases}$$

e sostituendo nella prima equazione

$$\frac{y-1}{y+1}+y^2+by+c=0$$

$$y^3+y^2(b+1)+y(b+c+1)+c-1=0$$

Questa equazione si deve annullare per $y=1$ perchè la circonferenza deve passare per il punto

A, e quindi una delle sue tre soluzioni deve essere $y = 1$.

Dividendo con il metodo di Ruffini, si ha

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & b+1 & b+c+1 & & c-1 \\
1 & & 1 & b+2 & & 2b+c+3 \\
\hline
 & 1 & b+2 & 2b+c+3 & & \underbrace{2b+2c+2}_{\text{resto}}
\end{array}
$$

Imponiamo che il resto sia uguale a zero

$$2b+2c+2=0$$

$$\boxed{c=-b-1} \qquad (1)$$

Resta l'equazione di secondo grado

$$y^2+(b+2)y+2b+c+3=0$$

ne, utilizzando la relazione (1), diviene

$$y^2+(b+2)y+2b-b-1+3=0$$

cioè

$$\boxed{y^2+(b+2)y+b+2=0} \qquad (2)$$

Per la già notata simmetria della funzione

rispetto all'asse y, i due punti di tangenza B e C devono avere la stessa ordinata, e quindi la (2) deve avere due soluzioni coincidenti. Poniamo allora $\Delta = 0$ nella (2)

$$(b+2)^2-4(b+2)=0$$

che, divisa per $(b+2)$ diviene

$$b+2-4=0$$

$$\boxed{b=2} \qquad (3)$$

Sostituendo le (3) ed (1) nella circonferenza generica, si ha

$$x^2+y^2+2y-3=0$$

corrispondente ad una circonferenza con centro nel punto $(0;-1)$ e raggio 2.

Sostituendo la (3) nella (2) si ricavano le ordinate (coincidenti) dei punti B e C; le ascisse si ottengono sostituendo tale valore nell'eq. della curva o della circonferenza. Si ha

$$\begin{cases} B \equiv (-\sqrt{3};-2) \\ C \equiv (\sqrt{3};-2) \end{cases}$$

Il perimetro del triangolo ABC è

$$\begin{cases} BC = 2\sqrt{3} \\ AB = 2\sqrt{3} \\ AC = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{perimetro} = 6\sqrt{3}}$$

per inciso constatiamo che il triangolo è equilatero.

Con semplici e banali calcoli si ottiene infine per l'area del triangolo

$$\boxed{S = 3\sqrt{3}}$$