

18.

## 1978: TERZO PROBLEMA

TRA LE PARABOLE DI EQUAZIONE

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + K$$

SI INDIVIDUI QUELLA SULLA QUALE LA RETTA  
DI EQUAZIONE

$$2y = x + 2$$

INTERCETTA UNA CORDA AB DI LUNGHEZZA  
 $l = \frac{5}{2}\sqrt{5}$ . CONDOTTE IN A E IN B LE RETTE  
TANGENTI ALLA PARABOLA TROVATA, SI CAL-  
COLI L'AREA DELLA REGIONE FINITA DI PIANO  
LIMITATA DALL'ARCO DI PARABOLA AB E DAL-  
LE DUE TANGENTI.

La funzione

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + K$$

corrisponde a un fascio di parabole con asse vertica-  
le e concavità verso l'alto, con vertice di coordinate

$$V \equiv \left(3; K - \frac{9}{2}\right)$$

Calcoliamo le coordinate dei due punti di contatto

A e B fra parabola generica del fascio e la retta

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} - 3x + k \\ y = \frac{x}{2} + 1 \end{cases}$$

Per confronto si ottiene

$$\frac{x}{2} + 1 = \frac{x^2}{2} - 3x + k$$

$$x^2 - 7x + 2k - 2 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{57-8k}}{2}$$

$$y = \frac{1}{2} \frac{7 \pm \sqrt{57-8k}}{2} + 1 = \frac{11 \pm \sqrt{57-8k}}{4}$$

e quindi

$$\begin{aligned} A &\equiv \left( \frac{7 - \sqrt{57-8k}}{2}, \frac{11 - \sqrt{57-8k}}{4} \right) \\ B &\equiv \left( \frac{7 + \sqrt{57-8k}}{2}, \frac{11 + \sqrt{57-8k}}{4} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

La lunghezza della corda AB (in funzione di k) è allora

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{\left( \frac{7 - \sqrt{\Delta}}{2} - \frac{7 + \sqrt{\Delta}}{2} \right)^2 + \left( \frac{11 - \sqrt{\Delta}}{4} - \frac{11 + \sqrt{\Delta}}{4} \right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4} \Delta} \\ &= \sqrt{\frac{5}{4} (57-8k)} = \frac{1}{2} \sqrt{5(57-8k)} \end{aligned}$$

Imponiamo a tale corda di avere la lunghezza richiesta

$$\frac{1}{2} \sqrt{5(57-8k)} = \frac{5}{2} \sqrt{5}$$

Risolvendo si ha

$$k = 4$$

e quindi la parabola richiesta è

$$\boxed{y = \frac{x^2}{2} - 3x + 4} \quad (2)$$

Per questa parabola si ha

$$V \equiv \left( 3; -\frac{1}{2} \right)$$

e, ricordando le (1),

$$A \equiv \left( 1; \frac{3}{2} \right) \quad B \equiv (6; 4)$$

Poiché la derivata della (2) è

$$y' = x - 3$$

i coefficienti angolari delle rette tangenti alla parabola nei punti A e B, sono

$$f'(1) = -2$$

$$f'(6) = 3$$

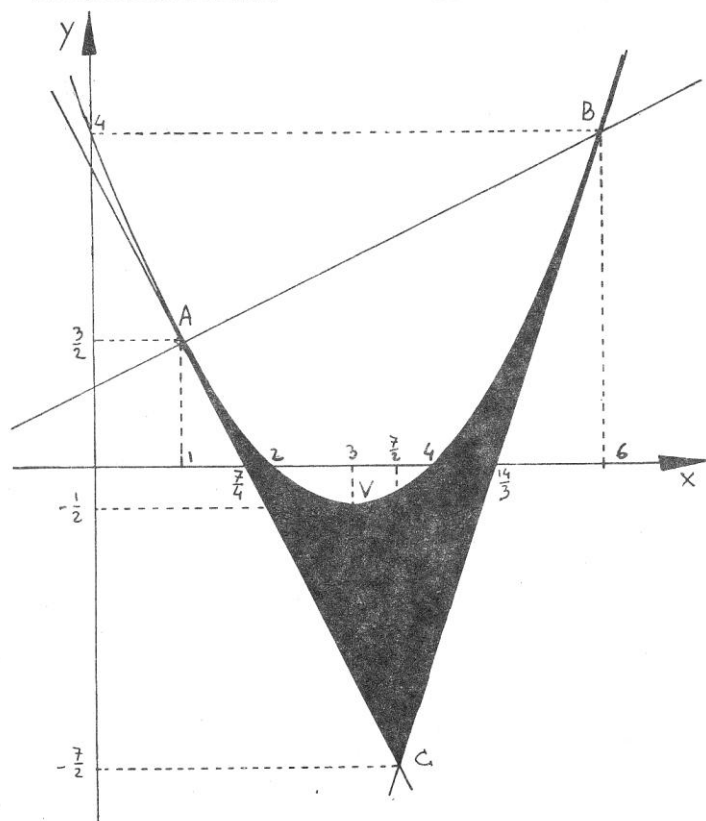
e le tangenti stesse hanno equazione

$$y - \frac{3}{2} = -2(x-1)$$

$$\boxed{y = -2x + \frac{7}{2}}$$

$$y - 4 = 3(x-6)$$

$$\boxed{y = 3x - 14}$$



Passiamo al calcolo dell'area della regione AVBC suddividendola nelle due parti  $S_1$  e  $S_2$ .

$$S_1 = \int_1^{\frac{7}{2}} \left[ \frac{x^2}{2} - 3x + 4 - \left( -2x + \frac{7}{2} \right) \right] dx = \int_1^{\frac{7}{2}} \left( \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} \right) dx =$$

$$= \left[ \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right]_1^{\frac{7}{2}} = \frac{125}{48}$$

$$S_2 = \int_{\frac{7}{2}}^6 \left[ \frac{x^2}{2} - 3x + 4 - (3x - 14) \right] dx = \int_{\frac{7}{2}}^6 \left( \frac{x^2}{2} - 6x + 18 \right) dx =$$

$$= \left[ \frac{x^3}{6} - 3x^2 + 18x \right]_{\frac{7}{2}}^6 = \frac{125}{48}$$

l'area della regione colorata è

$$S = \frac{125}{48} + \frac{125}{48} = \frac{125}{24}$$