ANNO 2000 Esame di stato – Corsi sperimentali del Piano nazionale Informatica (PNI) – Sessione ordinaria - Problema n.3

Assegnata la funzione
$f(x)=a\cdot\log^2 x+b\cdot\log x$
Dove il logaritmo si intende in base *e*, il candidato:

a) Determini per quali valori di *a* e *b* la *f*(*x*) ha un minimo relativo nel punto $\left(\sqrt{e};-\frac{1}{4}\right)$;
b) Disegni la curva grafico della funzione per i valori a e b così ottenuti e calcoli l'area della regione finita da essa delimitata con l'asse x.

Calcoli infine la probabilità che lanciando un dado cinque volte, esca per tre volte lo stesso numero.

## Soluzione

***Osservazione***
*La funzione assegnata dipende da due parametri soltanto. Nel quesito a) si richiede di imporre che siano soddisfatte tre condizioni. Infatti,*

1. *la curva rappresentativa del grafico della funzione deve passare per il punto* $\left(\sqrt{e};-\frac{1}{4}\right)$*;*
2. *se per* $x=\sqrt{e}$ *vi deve essere un minimo è necessario che nel punto si annulli la derivata prima ma questa condizione non è sufficiente ad assicurare che la funzione vi abbia un minimo;*
3. *affinché nel punto si abbia un minimo relativo è necessario imporre un'ulteriore condizione ( per esempio, che si abbia* $f''\left(\sqrt{e}\right)>0$.

*Il problema dunque non è ben posto. Vedremo, tuttavia, che imponendo la condizione di passaggio della curva per il punto* $\left(\sqrt{e};-\frac{1}{4}\right)$ *e che si annulli la derivata prima nel punto* $x=\sqrt{e}$ *i valori dei due parametri resteranno univocamente determinati e che la funzione ottenuta in corrispondenza agli stessi ha effettivamente nel punto* $x=\sqrt{e}$ *un minimo relativo, anzi il minimo sarà assoluto.*

a) La condizione di passaggio della curva dal punto è rappresentata dalla condizione

$f\left(\sqrt{e}\right)=-\frac{1}{4}$ che diventa

$$a\log^2\sqrt{e}+b\cdot\log\sqrt{e}=-\frac{1}{4}\rightarrow\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b=-\frac{1}{4}\rightarrow a+2b=-1$$

Imponiamo che la derivata prima si annulli nel punto $x=\sqrt{e}$

$$f'(x)=2a\log x\cdot\frac{1}{x}+b\cdot\frac{1}{x}\qquad\rightarrow\qquad f'\left(\sqrt{e}\right)=\frac{a+b}{\sqrt{e}}=0$$

Risolvendo il sistema formato dalle due equazioni ottenute

$$\begin{cases}a+2b=-1\\ \dfrac{a+b}{\sqrt{e}}=0\end{cases}\quad\text{si ricavano i valori}\quad\begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}$$

L'espressione analitica della funzione in esame è

$f(x)=\log^2 x-\log x$

**Studio della funzione**

- Dominio: La funzione è definita per ogni x reale positivo. A=]0;+∞[
- Segno e zeri

  La disuguaglianza $f(x)\geq 0$ si può scrivere nella forma seguente

  $\log x\cdot(\log x-1)\geq 0$ il cui insieme di soluzioni è ]0;1]∪[*e*;+∞[. In particolare gli zeri sono i due punti $x_1=1$, $x_2=e$. La funzione è negativa nell'intervallo ]1;*e*[.
- Limiti nei punti di frontiera

  La frontiera del dominio è $Fr(A)=\{0;+\infty\}$. Si ha:

  $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\log x\cdot(\log x-1)=(-\infty)\cdot(-\infty-1)=+\infty$

  dunque l'asse delle ordinate è asintoto verticale da destra;

  $\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\log x\cdot(\log x-1)=(+\infty)\cdot(+\infty-1)=+\infty$

  dunque per $x\to+\infty$ il diagramma della funzione non ha asintoto orizzontale.

  Facciamo vedere che non vi è neanche asintoto obliquo. Infatti risulta

  $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log^2 x-\log x}{x}\overset{H.}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2\log x-1}{x}\overset{H.}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ (C.V.D.)
- Monotonia, massimi e minimi relativi

  La funzione è derivabile in tutto il dominio di definizione e si ha

  $f'(x)=\frac{2\log x-1}{x}$

  Si riconosce facilmente che risulta $f'(x)>0$ per $x>\sqrt{e}$, $f'(x)<0$ per $x\in\left]0;\sqrt{e}\right[$, e come già sappiamo $f'\left(\sqrt{e}\right)=0$. Pertanto la funzione è strettamente decrescente nell'intervallo $\left]0;\sqrt{e}\right[$, strettamente crescente nell'intervallo $\left]\sqrt{e};+\infty\right[$ ed il punto $x=\sqrt{e}$ è di minimo relativo proprio. Anzi, visto che il dominio è un intervallo e che $x=\sqrt{e}$ è l'unico punto di minimo esso sarà anche di minimo assoluto. Il valore del minimo è già noto: $f\left(\sqrt{e}\right)=-\frac{1}{4}$.
- Concavità e flessi

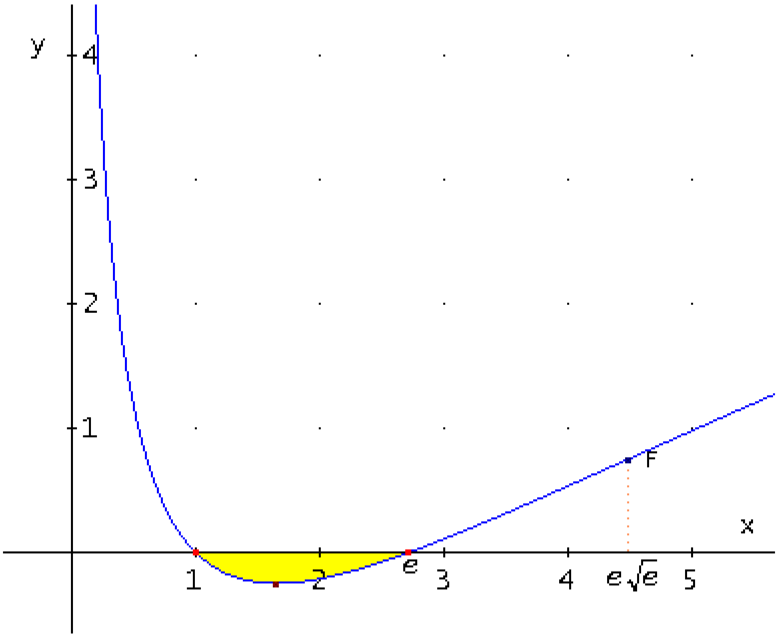
  La derivata seconda è $f''(x)=\frac{3-2\log x}{x^2}$. Risultando

  $f''(x)>0$ per $x<e\sqrt{e}$,

  $f''(x)<0$ per $x>e\sqrt{e}$,

  $f''\left(e\sqrt{e}\right)=0$,

  concludiamo che la curva rappresentativa del diagramma della funzione è convessa (volge la concavità verso l'alto) nell'intervallo $\left]0;e\sqrt{e}\right[$, è concava nell'intervallo $\left]e\sqrt{e};+\infty\right[$ ed ha un flesso nel punto di ascissa $x=e\sqrt{e}$. Il flesso è discendente e la sua ordinata è $f\left(e\sqrt{e}\right)=\frac{3}{4}$.




**Calcolo dell'area della regione piana**

La regione piana delimitata dal diagramma della funzione e dall'asse delle ascisse è collocata nel semipiano delle ordinate negative. Il valore della sua area è dato dal seguente integrale definito

$$Area = \int_1^e -\left(\log^2 x - \log x\right) dx =$$

Il calcolo dell'integrale indefinito si esegue procedendo con l'integrazione per parti che deve essere applicata due volte. Si ha

$$Area = \int_1^e -\left(\log^2 x - \log x\right) dx = -\int_1^e \log^2 x dx + \int_1^e \log x dx =$$

$$\left[-x \log^2 x\right]_1^e + \int_1^e \left(\cancel{x} \cdot 2 \cdot \log x \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\right) dx + \left[x \log x - x\right]_1^e = \ldots = 3 - e$$

Parte sulla probabilità.

Lanciando un dado, supposto regolare, la probabilità che esca un particolare numero è 1/6.
Nel testo del quesito posto si richiede di determinare quale sia

> <<*la probabilità che lanciando un dato (regolare) per cinque volte si presenti lo stesso numero esattamente tre volte*>>.

Osservazione

La formulazione del quesito mi sembra ambigua. Infatti si può interpretare la richiesta in due modi.

**Prima interpretazione**

La richiesta sia quella di determinare la probabilità che si presenti nei cinque lanci per tre volte uno particolare dei sei numeri presenti sulle facce. Ad esempio, fissato il numero X=4, determinare la probabilità dell' evento:

$E_1$= " Il numero 4 si presenta tre volte nei cinque lanci"

**Seconda interpretazione**

La richiesta sia quella di determinare la probabilità che si presenti nei cinque lanci per tre volte uno qualsiasi dei sei numeri presenti sulle facce. In questo caso l'evento di cui calcolare la probabilità è:

$E_2$=" Nei cinque lanci si presenta per tre volte uno qualsiasi dei sei numeri presenti sulle facce del dado".

Di seguito determino la probabilità di $E_1$ e di $E_2$.

**Probabilità di $E_1$**

Si supponga di essere interessati a determinare la probabilità che il particolare numero X=4 si presenti tre volte nei cinque lanci. In ogni lancio la probabilità che si presenti il numero è 1/6 ed ovviamente 5/6 la probabilità che non si presenti. L'uscita del numero deve avvenire in tre dei cinque lanci. Le modalità con cui si può manifestare l'evento $E_1$ sono pari al numero di combinazioni semplici dei cinque lanci presi a tre a tre. Questo numero è espresso dal simbolo $\binom{5}{3}$ il cui valore è

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Nella tabella a lato sono riportate le dieci diverse modalità.

| Modalità Evento | Lanci | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | X | X | X | | |
| 2 | X | X | | X | |
| 3 | X | X | | | X |
| 4 | X | | X | X | |
| 5 | X | | X | | X |
| 6 | X | | | X | X |
| 7 | | X | X | X | |
| 8 | | X | X | | X |
| 9 | | X | | X | X |
| 10 | | | X | X | X |

La probabilità che si verifichi ciascuna delle modalità indicate è

$$p = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

Le modalità sono ovviamente incompatibili tra loro e dunque la probabilità che si verifichi l'evento è data dalla somma delle probabilità delle singole modalità (teorema della probabilità totale). Dunque

$$P(E_1) = 10 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5^3}{3 \cdot 6^4}$$

**Probabilità di $E_2$**

L'evento $E_2$ si verifica se nei cinque lanci esce per tre volte il numero 1, oppure per tre volte il numero 2, …, oppure se esce per tre volte il numero 6. Indicando con $E_{2i}$ l'evento

$E_{2i}$=<<Nei cinque lanci si presenta tre volte il numero i>>

potendo essere

i=1,2,3,…,6,

evidentemente l'evento $E_2$ risulta essere l'unione logica

$E_2 = E_{21} \cup E_{22} \cup E_{23} \cup E_{24} \cup E_{25} \cup E_{26}$

Poiché gli eventi $E_{2i}$ sono incompatibili e ciascuno ha probabilità

$$p = \frac{5^3}{3 \cdot 6^4}$$

concludiamo che la probabilità dell'evento $E_2$ è

$$P(E_2) = 6 \cdot \frac{5^3}{3 \cdot 6^4} = \frac{125}{648}$$