ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Tema di: MATEMATICA E INFORMATICA

1. Il candidato dopo aver dato una giustificazione della formula d'integrazione per parti:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \qquad (1)$$

dica cosa c'è di sbagliato nel ragionamento seguente:

sia da calcolare

$$\int \frac{1}{x}dx$$

applicando la (1) con $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g'(x) = 1$, otteniamo:

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{x} \cdot 1 \cdot dx = \frac{1}{x} \cdot x - \int \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cdot xdx = 1 + \int \frac{1}{x}dx$$

da cui, eliminando $\int \frac{1}{x}dx$ da ambo i membri, segue: $0 = 1$.

Successivamente applichi la (1) per calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^1 e^x \left(x^2 + x + 1\right)dx$$

2 Il candidato affronti le seguenti questioni:

· fra tutti i cilindri iscritti in un cono circolare retto ha volume massimo quello la cui altezza è la terza parte dell'altezza del cono.

· dopo averlo esposto applicare il teorema di *de L'Hôpital* per dimostrare che, per *n finito,* $n \in N$, si ha : $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{2^x} = 0$;

· esporre una strategia numerica per il calcolo approssimato di log2.

3. Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y) si consideri la curva g di equazione:

$$y = a\sin^2 x + b\sin x - \frac{5}{2}$$

- Si determinino i coefficienti a e b affinché g abbia un flesso nel punto $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$;
- si disegni il grafico della curva, per i valori di a e di b così trovati, nell'intervallo $[0,2\pi]$;
- si determini l'area della regione limitata dalla curva, dall'asse x e dalle rette:

$$x = \frac{\pi}{6} \qquad \text{e} \qquad x = \frac{5\pi}{6}$$

Infine, si esponga un algoritmo per il calcolo approssimato di π.

Durata massima della prova: 6 ore

E' consentito l'uso della calcolatrice scientifica non grafica

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA1

Punto 1

Il candidato dopo aver dato una giustificazione della formula d'integrazione per parti:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \qquad (1)$$

dica cosa c'è di sbagliato nel ragionamento seguente:

sia da calcolare

$$\int \frac{1}{x}dx$$

applicando la (1) con $f(x) = \frac{1}{x}$ **e** $g'(x) = 1$**, otteniamo:**

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{x} \cdot 1 \cdot dx = \frac{1}{x} \cdot x - \int \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot xdx = 1 + \int \frac{1}{x}dx$$

da cui, eliminando $\int \frac{1}{x}dx$ **da ambo i membri, segue:** $0 = 1$**.**

Il metodo di integrazione per parti deriva direttamente dalla formula di derivazione del prodotto:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Integrando ambo i membri si ha:

$$\int (f \cdot g)' dx = \int (f' \cdot g)dx + \int (f \cdot g')dx \Rightarrow f \cdot g = \int (f' \cdot g)dx + \int (f \cdot g')dx \Rightarrow \int (f \cdot g')dx = f \cdot g - \int (f' \cdot g)dx$$

Nel ragionamento relativo a $\int \frac{1}{x}dx$ di cui sopra, c'è un errore di fondo in quanto si omette la proprietà delle primitive di una stessa funzione di differire per una costante. Infatti siano $f(x), g(x)$ due primitive di $\int \frac{1}{x}dx$ che differiscono per una costante e posto $f(x) = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + h, g(x) = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + k$ con $h \neq k$, seguendo il ragionamento fatto sopra si ha

$$\underbrace{\int \frac{1}{x}dx}_{\ln|x|+h} = \int \frac{1}{x} \cdot 1 \cdot dx = \frac{1}{x} \cdot x - \int \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot xdx = 1 + \underbrace{\int \frac{1}{x}dx}_{\ln|x|+k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|x| + h = 1 + \ln|x| + k \Rightarrow h - k = 1$$

cioè le costanti per le quali differiscono le primitive, differiscono tra di loro di una unità, cosa ben diversa dall'equazione impossibile $0=1$. In altri modi l'equazione impossibile $0=1$ la si ottiene partendo dal presupposto che la primitiva di una funzione sia unica e quindi negando che esistono infinite primitive che differiscono per una costante.

Punto 2

Successivamente applichi la (1) per calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^1 e^x\left(x^2+x+1\right)dx$$

Calcoliamo prima l'integrale indefinito $\int e^x\left(x^2+x+1\right)dx$ scegliendo $g'(x)=e^x$, $f(x)=x^2+x+1$. Si ha:

$$\int e^x\left(x^2+x+1\right)dx = e^x\left(x^2+x+1\right)-\int(2x+1)e^x dx \xrightarrow[\text{a } \int(2x+1)e^x dx]{\text{Riapplicando l'integrazione per parti}}$$

$$\int e^x\left(x^2+x+1\right)dx = e^x\left(x^2+x+1\right)-(2x+1)e^x+\int 2e^x dx =$$

$$= e^x\left(x^2+x+1\right)-(2x+1)e^x+2e^x+k = e^x\left(x^2-x+2\right)+k$$

Quindi $\int_0^1 e^x\left(x^2+x+1\right)dx = \left[e^x\left(x^2-x+2\right)\right]_0^1 = (2e-2)$.

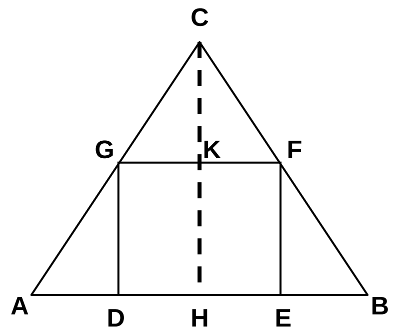
PROBLEMA2

Il candidato affronti le seguenti questioni:

Punto 1

fra tutti i cilindri iscritti in un cono circolare retto ha volume massimo quello la cui altezza è la terza parte dell'altezza del cono.

Si consideri la figura sottostante raffigurante in sezione il cono circoscritto al cilindro.



Siano *r* ed *h* il raggio di base e l'altezza del cono rispettivamente. Poniamo $\overline{KH} = x$ con $0 < x < h$.

I triangoli CHB e FEB sono simili per cui $\overline{CH} : \overline{HB} = \overline{FE} : \overline{EB}$ e cioè $h : r = x : \overline{EB}$ da cui $\overline{EB} = \frac{xr}{h}$

da cui il raggio di base del cilindro è $R = \overline{HB} - \overline{EB} = r - \frac{xr}{h} = r\left(1 - \frac{x}{h}\right)$. Il volume del cilindro è

$V_{Cilindro}(x) = \left(\pi \cdot \overline{HE}^2\right) \cdot \overline{KH} = \pi r^2 x \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2$. La massimizzazione del volume la effettuiamo tramite derivazione. La derivata prima del volume è:

$$V'_{Cilindro}(x) = \pi r^2 \left[\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 - \frac{2x}{h}\left(1 - \frac{x}{h}\right)\right] = \pi r^2 \left[\frac{3x^2}{h^2} - \frac{4x}{h} + 1\right] = \frac{\pi r^2}{h^2}(3x - h)(x - h) \text{ per cui}$$

$$V'_{Cilindro}(x) = \frac{\pi r^2}{h^2}(3x - h)(x - h) > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{h}{3} \Rightarrow V_{Cilindro}(x) \text{ strettamente crescente in } \left(0, \frac{h}{3}\right)$$

$$V'_{Cilindro}(x) = \frac{\pi r^2}{h^2}(3x - h)(x - h) < 0 \Rightarrow \frac{h}{3} < x < h \Rightarrow V_{Cilindro}(x) \text{ strettamente decrescente in } \left(\frac{h}{3}, h\right)$$

$$V'_{Cilindro}(x) = \frac{\pi r^2}{h^2}(3x - h)(x - h) = 0 \Rightarrow x = h \vee x = \frac{h}{3}$$

Inoltre $V''_{Cilindro}(x) = \frac{2\pi r^2}{h^2}(3x - 2h) \Rightarrow V''_{Cilindro}\left(\frac{h}{3}\right) = -\frac{2\pi r^2}{h} < 0$ per cui il volume del cilindro è massimo per $x = \frac{h}{3}$ e vale $V_{Cilindro}\left(\frac{h}{3}\right) = \pi r^2 \left(\frac{h}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4\pi r^2 h}{27}$.

Punto 2

dopo averlo esposto applicare il teorema di *de L'Hôpital* per dimostrare che, per *n finito*,

$n \in N$ **, si ha :** $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{2^x} = 0$ **;**

Enunciamo la regola di de L' Hôpital:

Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite in un intorno di $+\infty$, sono derivabili in tale intorno, con $g'(x) \neq 0$; se le due funzioni, per $x \to +\infty$ tendono entrambe a 0 o a ∞ e se esiste il limite del rapporto delle derivate delle funzioni date, $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora esiste anche il limite del rapporto delle funzioni $\frac{f(x)}{g(x)}$ e vale $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Nel caso in esame è possibile applicare tale teorema e, dopo averlo applicato *n* volte si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{\ln 2 \cdot 2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}}{(\ln 2)^2 \cdot 2^x} = \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{(\ln 2)^n \cdot 2^x} = 0$$

Si osservi anche che $D^n\left[x^n\right] = n!$ se $n \geq 1$, e $D^n\left[2^x\right] = (\ln 2)^n \cdot 2^x$.

In alternativa, poiché $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{2^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2^{\frac{x}{n}}} \right)^n$, calcolando il limite $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2^{\frac{x}{n}}} \right)$ si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2^{\frac{x}{n}}} \right) \overset{\substack{De \\ L'Hopital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2^{\frac{x}{n}} \cdot \frac{\ln 2}{n}} = 0 .$$

Punto 3

Esporre una strategia numerica per il calcolo approssimato di log2.

Una procedura per calcolare il valore $\ln 2$ si basa sull'integrazione numerica attraverso il metodo dei rettangoli, dei trapezi o di Cavalieri Simpson di $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$, infatti si ha $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \left[\ln|x|\right]_1^2 = \ln 2$.

Scegliamo di suddividere l'intervallo [1,2] in 4 intervallini di ampiezza $\frac{1}{4}$. Ponendo $g(x) = \frac{1}{x}$, si ha:

- *Metodo dei rettangoli*:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \cong \left(\frac{b-a}{n}\right)\cdot\left[g(x_0)+g(x_1)+g(x_2)+g(x_3)\right]=$$
$$=\left(\frac{b-a}{n}\right)\cdot\left[g(1)+g\left(\frac{5}{4}\right)+g\left(\frac{3}{2}\right)+g\left(\frac{7}{4}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\left[1+\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{4}{7}\right]=\frac{319}{420}\cong 0.7595$$

con un errore commesso $e \le \frac{(b-a)^2}{2n}\cdot M$ con $M=\max|g'(x)|$ in $[1,2]$. In questo caso $|g'(x)|=\left|-\frac{1}{x^2}\right|=\left|\frac{1}{x^2}\right|$ ed in [1;2] il massimo $M=\max|g'(x)|=\max\left|\frac{1}{x^2}\right|$ è raggiunto per $x=1$ e vale $M=1$ per cui l'errore è $e \le \frac{(b-a)^2}{2n}\cdot 1=\frac{1}{8}=0.125$.

- *Metodo dei trapezi*:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \cong \left(\frac{b-a}{n}\right)\cdot\left[\frac{g(x_0)+g(x_4)}{2}+g(x_1)+g(x_2)+g(x_3)\right]=$$
$$=\left(\frac{b-a}{n}\right)\cdot\left[\frac{g(1)+g(2)}{2}+g\left(\frac{5}{4}\right)+g\left(\frac{3}{2}\right)+g\left(\frac{7}{4}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1+\frac{1}{2}}{2}+\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{4}{7}\right]=\frac{1171}{1680}\cong 0.6970$$

con un errore commesso $e \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M$ con $M=\max|g''(x)|$ in $[1,2]$. In questo caso $|g''(x)|=\left|\frac{2}{x^3}\right|$ ed in [1;2] il massimo $M=\max|g''(x)|=\max\left|\frac{2}{x^3}\right|$ è raggiunto per $x=1$ e vale $M=2$ per cui l'errore è $e \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M=\frac{1}{192}\cdot 2=\frac{1}{96}\cong 0.010$.

- *Metodo di Cavalieri Simpson*:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \cong \left(\frac{b-a}{n}\right)\cdot\left\{\left[\frac{g(x_0)+g(x_4)}{3}\right]+\frac{4}{3}\cdot\left[g(x_1)+g(x_3)\right]+\frac{2}{3}\cdot g(x_2)\right\}=$$
$$=\left(\frac{b-a}{n}\right)\cdot\left\{\left[\frac{g(1)+g(2)}{3}\right]+\frac{4}{3}\cdot\left[g\left(\frac{5}{4}\right)+g\left(\frac{7}{4}\right)\right]+\frac{2}{3}\cdot g\left(\frac{3}{2}\right)\right\}=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1+\frac{1}{2}}{3}+\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{4}{5}+\frac{4}{7}\right)+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\right]=\frac{1747}{2520}\cong 0.6932$$

con un errore commesso $e \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot M$ con $M = \max\left|g^{IV}(x)\right|$ in $[1,2]$. In questo caso $\left|g^{IV}(x)\right| = \left|\frac{24}{x^5}\right|$ ed in [1;2] il massimo $M = \max\left|g^{IV}(x)\right| = \max\left|\frac{24}{x^5}\right|$ è raggiunto per $x = 1$ e vale $M = 24$ per cui l'errore è $e \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot M = \frac{1}{46080} \cdot 24 = \frac{1}{1920} \cong 5.2 \cdot 10^{-4}$.

Nota che il metodo che, a parità di passi, consente di calcolare un valore di più vicino a quello reale, pari a 0.69325, è il metodo di Cavalieri Simpson.

PROBLEMA3

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y) si consideri la curva g di equazione:

$$y = a\sin^2 x + b\sin x - \frac{5}{2}$$

Punto 1

Si determinino i coefficienti a e b affinché g abbia un flesso nel punto $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$**;**

La curva $y = a\sin^2 x + b\sin x - \frac{5}{2}$ passa per $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ se $a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b\cdot\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow a + 2b - 10 = 0$. Inoltre la derivata seconda di $y = a\sin^2 x + b\sin x - \frac{5}{2}$ è $y'' = 2a\cos(2x) - b\sin x$ per cui essa presenta un flesso in $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ se $y''\left(\frac{\pi}{6}\right) = a - \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow b = 2a$. Mettendo a sistema le due condizioni $\begin{cases} a + 2b - 10 = 0 \\ b = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$ e la curva diventa $y = 2\sin^2 x + 4\sin x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(5 + 2\sin x)(2\sin x - 1)$.

Punto 2

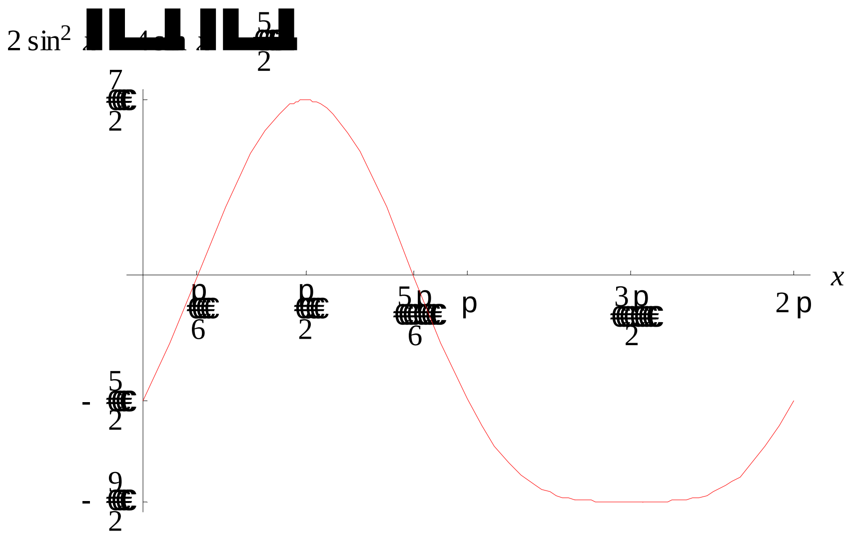
si disegni il grafico della curva, per i valori di a e di b così trovati, nell'intervallo $[0,2\pi]$**;**

Studiamo la funzione $y(x) = 2\sin^2 x + 4\sin x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(5 + 2\sin x)(2\sin x - 1)$ nell'intervallo $[0,2\pi]$

- *Dominio*: $[0,2\pi]$;
- *Intersezione asse delle ascisse*: $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$;
- *Intersezioni asse delle ordinate*: $x = 0 \rightarrow y = -\frac{5}{2}$;
- *Eventuali simmetrie*: non è una funzione nè pari nè dispari, ma è una funzione periodica di periodo $T = 2\pi$;
- *Positività*: $y(x) = \frac{1}{2}(5 + 2\sin x)(2\sin x - 1) > 0 \Rightarrow \sin x > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$;
- *Comportamento agli estremi*: $y(0) = y(2\pi) = -\frac{5}{2}$;

- *Asintoti verticali*: non vi sono asintoti verticali;
- *Asintoti orizzontali*: non vi sono asintoti orizzontali in quanto la funzione è periodica;
- *Asintoti obliqui*: non vi sono asintoti obliqui in quanto la funzione è periodica ;
- *Crescenza e decrescenza*: la derivata prima è $y'(x) = 4\cos x(1+\sin x)$ per cui $y'(x) = 4\cos x(1+\sin x) > 0 \Rightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ cioè la funzione è strettamente crescente in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ e strettamente decrescente altrove;
- *Concavità e convessità*: la derivata seconda è $y''(x) = 4(\sin x + 1)(1 - 2\sin x)$ ed è positiva per $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$; inoltre $y'' = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$ per cui in $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right), \left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$ la funzione presenta due flessi a tangente obliqua. Tra l'altro $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -8 < 0, y''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ per cui $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{7}{2}\right)$ è un massimo relativo ed assoluto mentre per constatare la natura del punto $\left(\frac{3\pi}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ dobbiamo calcolare le derivate successive. In particolare la derivata terza e quarta sono:
$$y'''(x) = -4\cos x(4\sin x + 1) \Rightarrow y'''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, y^{IV}(x) = -4(4\cos 2x - \sin x) \Rightarrow y^{IV}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 12 > 0$$
per cui $\left(\frac{3\pi}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ è un minimo relativo ed assoluto. In conclusione la funzione ha concavità verso l'alto in $\left[0, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$ e verso il basso in $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$.

Il grafico è sotto presentato:



Punto 3

si determini l'area della regione limitata dalla curva, dall'asse x e dalle rette:

$$x = \frac{\pi}{6} \qquad \text{e} \qquad x = \frac{5\pi}{6}$$

L'area da calcolare è pari a:

$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left[2\sin^2 x + 4\sin x - \frac{5}{2} \right] dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left[(1 - \cos(2x)) + 4\sin x - \frac{5}{2} \right] dx =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left[-\cos(2x) + 4\sin x - \frac{3}{2} \right] dx = \left[-\frac{\sin(2x)}{2} - 4\cos(x) - \frac{3}{2}x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} =$$

$$= \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + 2\sqrt{3} - \frac{5\pi}{4} \right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{4} \right) \right] = \frac{9\sqrt{3}}{2} - \pi$$

Punto 4

Infine, si esponga un algoritmo per il calcolo approssimato di π.

Tenuto conto che è $\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, un algoritmo per il calcolo di π si riconduce a un algoritmo di integrazione numerica; ci sono differenti metodi di integrazione numerica, come il metodo dei rettangoli, dei trapezi o di Cavalieri - Simpson. Quest'ultimo prevede la suddivisione dell'intervallo di integrazione in sottointervalli e la sostituzione in questi sottointervalli della funzione integranda mediante archi di parabola, cioè mediante polinomi quadratici. Calcoliamo π con un errore inferiore a 10^{-4} attraverso la formula d'integrazione approssimata di Cavalieri Simpson.

Poniamo $a=0, b=1, g(x)=\frac{1}{1+x^2}$; con queste assunzioni l'errore che si commette utilizzando il metodo suddetto è $e \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4}\cdot M$ dove $M=\max\left|g^{IV}(x)\right|$ in [0,1] ed n è il numero di sottointervalli. Nel caso in esame la derivata quarta di $g(x)=\frac{1}{1+x^2}$ è $g^{IV}(x)=\frac{24\left(5x^4-10x^2+1\right)}{\left(1+x^2\right)^5}$ e la derivate quarta in [0,1] è massima per $x=0$ e $M=\max\left|g^{IV}(x)\right|=24$. Quindi l'errore commesso è $e \leq \frac{2}{15n^4}$ e poiché si vuole un risultato con un errore inferiore a 10^{-4} si deve scegliere n in modo che $e \leq \frac{2}{15n^4}<\frac{1}{10000} \Rightarrow n^4>\frac{20000}{15}=\frac{4000}{3} \Rightarrow n>\sqrt[4]{\frac{4000}{3}} \cong 6.04$ per cui scegliamo $n=8$ in quanto il metodo di Cavalieri Simpson va usato per divisioni pari.

Applichiamo la formula di Cavalieri - Simpson:

$$
\begin{aligned}
&\pi=4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \cong \\
&\cong 4\cdot\left(\frac{1}{8}\right)\cdot\left\{\left[\frac{g(x_0)+g(x_8)}{3}\right]+\frac{4}{3}\cdot\left[g(x_1)+g(x_3)+g(x_5)+g(x_7)\right]+\frac{2}{3}\cdot\left[g(x_2)+g(x_4)+g(x_6)\right]\right\}= \\
&=\frac{4}{8}\cdot\left\{\left[\frac{g(0)+g(1)}{3}\right]+\frac{4}{3}\cdot\left[g\left(\frac{1}{8}\right)+g\left(\frac{3}{8}\right)+g\left(\frac{5}{8}\right)+g\left(\frac{7}{8}\right)\right]+\frac{2}{3}\cdot\left[g\left(\frac{2}{8}\right)+g\left(\frac{4}{8}\right)+g\left(\frac{6}{8}\right)\right]\right\}= \\
&=\frac{4}{8}\cdot\left[\frac{1+\frac{1}{2}}{3}+\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{64}{65}+\frac{64}{73}+\frac{64}{89}+\frac{64}{113}\right)+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{64}{68}+\frac{64}{80}+\frac{64}{100}\right)\right] \cong 3.14159
\end{aligned}
$$

Il valore reale di π per le prime cinque cifre decimali coincide con quello trovato.