**PRIMO QUESITO MATURITA' 1999-2000: SOLUZIONE DI DE ROSA NICOLA CHE ALLORA DOVETTE CIMENTARSI DIRETTAMENTE COL QUESITO**

**1.** Sia f(x) una funzione reale di variabile reale, continua su tutto l'asse reale, tale che:

[1] $$\int_0^1 f(x)\,dx = 2 \quad \text{e} \quad \int_0^2 f(x)\,dx = -5 .$$

a) Di ciascuno dei seguenti integrali:

$$\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx , \qquad \int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx , \qquad \int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right)dx , \qquad \int_0^1 f(2x)\,dx ,$$

dire se le condizioni [1] sono sufficienti per calcolarne il valore e in caso di risposta affermativa qual è questo.

b) Posto:

$$f(x) = a\,x^3 + b\,x + c ,$$

dove a, b, c sono parametri reali con $a \neq 0$, determinare le curve di equazione $y = f(x)$ che soddisfano alle condizioni [1].

c) Dimostrare che ognuna delle curve trovate ha uno ed un solo punto di flesso che è centro di simmetria per la curva medesima.

d) Determinare quella, tra tali curve, che ha il flesso nel punto di ordinata – 4 .

e) Fra le curve suddette determinare, infine, quelle che hanno punti estremanti e quelle che non ne hanno.

Soluzione:

1)

$$a)\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

Sostituzione $\frac{x}{2}=t \Rightarrow x=2t \Rightarrow dx=2dt \Rightarrow$

$\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2\int_0^{1/2} f(t)dt$ **Non ci sono condizioni sufficienti per calcolarlo**

$$b)\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

Con la stessa sostituzione precedente si ha :

$\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2\int_0^1 f(t)dt = \mathbf{4}$

$$c)\int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

Con la stessa sostituzione precedente si ha :

$\int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2\int_1^2 f(t)dt = 2\left[\int_0^2 f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt\right] = \mathbf{-14}$

$$d)\int_0^1 f(2x)dx$$

Sostituzione $2\text{x} = t \Rightarrow x=\frac{t}{2} \Rightarrow dx=\frac{dt}{2} \Rightarrow$

$\int_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt = -\mathbf{\frac{5}{2}}$

2)

$$\begin{cases} \int_0^1 \left(ax^3+bx+c\right)dx = 2 \\ \\ \int_0^2 \left(ax^3+bx+c\right)dx = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[a\frac{x^4}{4}+b\frac{x^2}{2}+cx\right]_0^1 = \frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c = 2 \\ \left[a\frac{x^4}{4}+b\frac{x^2}{2}+cx\right]_0^2 = 4a+2b+2c = -5 \end{cases}$$

Per cui bisogna risolvere il sistema :

$$\begin{cases} \mathrm{a}+2\mathrm{b}+4\mathrm{c}=8 \\ \\ 4a+2b+2c=-5 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro troviamo : $\mathbf{c} = \frac{\mathbf{13+3a}}{\mathbf{2}}$ e sostituendo troviamo $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{-7a-18}}{\mathbf{2}}$

Per cui :

$$\mathbf{f(x) = ax^3 + \left(\frac{-7a-18}{2}\right)x + \frac{13+3a}{2}}$$

3)

Calcolo del punto di flesso:

$$f'(x) = 3ax^2 + \left(\frac{-7a-18}{2}\right)$$

$$f''(x) = 6ax$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ e inoltre } f'(0) = \left(\frac{-7a-18}{2}\right) \neq 0 \Rightarrow$$

$\mathbf{x = 0}$ è ascissa dell'unico punto di flesso $\mathbf{F} = \left(\mathbf{0, \frac{13+3a}{2}}\right)$

Dimostriamo che **F è centro di simmetria**:

Se S è centro di simmetria, una qualsiasi retta per S interseca la curva in due punti $P_1$ e $P_2$ simmetrici rispetto ad S. Sia $P_1(x_1;y_1)$, $P_2(x_2;y_2)$, $S(\alpha;\beta)$. $S$ è medio fra $P_1$ e $P_2$ quindi (1) $\alpha = \frac{x_1+x_2}{2}$ (2) $\beta = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. Dalla (2) si ha $2\beta = f(x_1)+f(x_2) = f(x_1)+f(2\alpha-x_1)$. Questa relazione deve valere per qualunque $x \in$ al dominio di $f(x)$

$$\boxed{f(x)+f(2\alpha-x)=2\beta}$$

Nel nostro caso $\alpha$ =0 e $\beta = \frac{13+3a}{2}$. Per cui la relazione da dimostrare diventa:

$$f(x)+f(-x)=13+3a$$

Infatti:

$$f(x) = ax^3 + \left(\frac{-7a-18}{2}\right)x + \frac{13+3a}{2}$$

$$f(-x) = -ax^3 - \left(\frac{-7a-18}{2}\right)x + \frac{13+3a}{2}$$

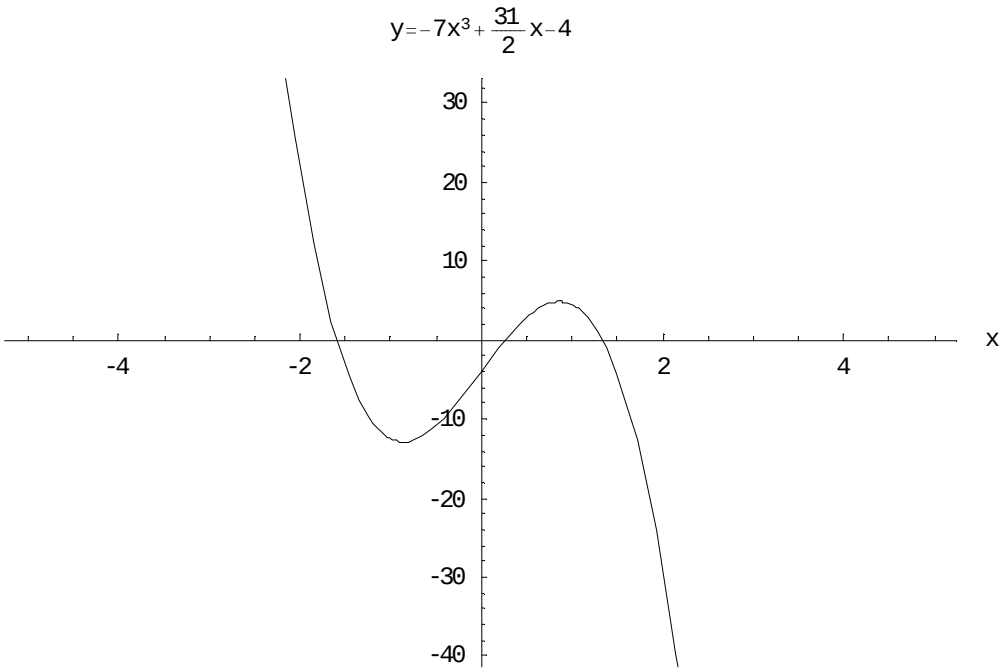
Da cui

$f(x) + f(-x) = 13 + 3a$ c.v.d

4)

$$y_F = -4 \Rightarrow \frac{13+3a}{2} = -4 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a = -7} \\ \mathbf{b = \frac{31}{2}} \\ \mathbf{c = -4} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{f(x) = -7x^3 + \frac{31}{2}x - 4}$$

Una tale funzione ha come dominio R, non presenta asintoti orizzontali, nè verticali nè obliqui, presenta un minimo in $\left(-\sqrt{\frac{31}{42}}, -4 - \frac{31}{3}\sqrt{\frac{31}{42}}\right)$ ed un massimo in $\left(-\sqrt{\frac{31}{42}}, -4 + \frac{31}{3}\sqrt{\frac{31}{42}}\right)$. Il grafico è sotto rappresentato:



5)

$$f'(x) = 3ax^2 + \left(\frac{-7a-18}{2}\right)$$

Per avere estremanti il delta della derivata deve essere maggiore di zero cioè:

$$\mathbf{-3a\left(\frac{-7a-18}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow a(7a+18) > 0 \Rightarrow a \in \left(-\infty, -\frac{18}{7}\right) \cup (0, +\infty)}$$

Equivalentemente non si hanno estremanti se:

$$\mathbf{a \in \left[-\frac{18}{7}, 0\right]}$$