Scuole Italiane all'Estero

ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione 2001

SECONDA PROVA SCRITTA

Tema di Matematica

PROBLEMA 1

E' assegnato un cilindro equilatero Q il cui raggio di base misura *a*.

a) Si determini il cono C di volume minimo circoscritto al cilindro (C e Q hanno basi complanari);

b) Si determini il valore di *a* per il quale il volume di C, approssimato alla prima cifra decimale, è $31{,}4\ dm^3$;

c) Si determini il volume della sfera S circoscritta a C.

PROBLEMA 2

Nel piano riferito ad un sistema di riferimento ortogonale monometrico è data la curva **G** di equazione:

$$y = 2x - \frac{x^3}{2}$$

a) Si studi e si rappresenti **G**;

b) considerata la retta r di coefficiente angolare m passante per il punto A(2, 0), si determini, al variare di m, il numero delle intersezioni di r con **G**;

c) si calcoli l'area della regione finita di piano R, del primo quadrante, delimitata da **G** e dall'asse x;

d) si determini il volume del solido generato da R in un giro completo intorno all'asse x.

QUESTIONARIO

1. Enunciare il teorema di *de L'Hôpital* e applicarlo per dimostrare che:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^7}{2^x}$$

2. Mostrare, eventualmente anche con esempi, che la derivata del prodotto di due o più funzioni non è il prodotto delle derivate.

3. Dimostrare che se un polinomio *p(x)* è divisibile per $(x-a)^m$ allora $p'(x)$ è divisibile per $(x-a)^{m-1}$

4. Calcolare la derivata della funzione:

$$\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\arctan x$$

Dal risultato quali conseguenze se ne possono trarre per la f(x)? E' una costante?

5. Si ricavi la formula che dà il numero delle combinazioni semplici di n elementi a k a k.

6. Verificare che:

$$\int_e^{e^2} x\log(x)dx=\frac{e^2}{4}\left(3e^2-1\right)$$

7. Siano a e b due numeri positivi diversi da 1. Dimostrare che:

$$\log_a b\cdot\log_b a=1$$

8. La somma di due numeri non negativi è 16. Quale è il valore più basso che assume la somma dei loro quadrati? Quale il valore più alto?

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a quattro domande scelte all'interno del questionario.

Durata massima della prova : 6 ore

E' consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile e la consultazione del vocabolario d'Italiano.

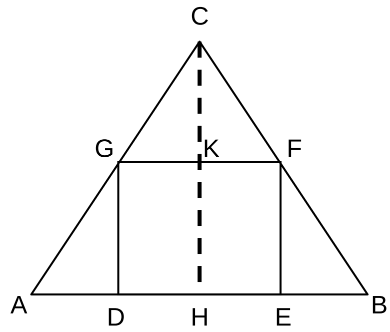
PROBLEMA 1

E' assegnato un cilindro equilatero Q il cui raggio di base misura *a*.

Punto 1

Si determini il cono C di volume minimo circoscritto al cilindro (C e Q hanno basi complanari);

Si consideri la figura sottostante raffigurante in sezione il cono circoscritto al cilindro.



Poniamo $\overline{CH} = x$ con $x > 2a$. Il cilindro è equilatero per cui $\overline{FE} = \overline{DE} = 2a$. I triangoli CHB e CKF sono simili per cui $\overline{CH} : \overline{HB} = \overline{CK} : \overline{KF}$ e cioè $x : \overline{HB} = (x-2a) : a$ da cui $\overline{HB} = \frac{ax}{x-2a}$. Il volume del cono è $V_{Cono}(x) = \frac{1}{3}\left(\pi \cdot \overline{HB}^2\right) \cdot \overline{CH} = \frac{\pi a^2}{3} \frac{x^3}{(x-2a)^2}$. La minimizzazione del volume la effettuiamo tramite derivazione. La derivata prima del volume è:

$$V'_{Cono}(x) = \frac{\pi a^2}{3}\left[\frac{3x^2(x-2a)^2 - 2x^3(x-2a)}{(x-2a)^4}\right] = \frac{\pi a^2}{3}\left[\frac{x^3 - 6ax^2}{(x-2a)^3}\right] = \frac{\pi a^2}{3}\left[\frac{x^2(x-6a)}{(x-2a)^3}\right] \text{ per cui}$$

$$V'_{Cono}(x) = \frac{\pi a^2}{3}\left[\frac{x^2(x-6a)}{(x-2a)^3}\right] > 0 \Rightarrow x > 6a \Rightarrow V_{Cono}(x) \text{ strettamente crescente in } (6a, +\infty)$$

$$V'_{Cono}(x) = \frac{\pi a^2}{3}\left[\frac{x^2(x-6a)}{(x-2a)^3}\right] < 0 \Rightarrow 2a < x < 6a \Rightarrow V_{Cono}(x) \text{ strettamente decrescente in } (2a, 6a)$$

$$V'_{Cono}(x) = \frac{\pi a^2}{3}\left[\frac{x^2(x-6a)}{(x-2a)^3}\right] = 0 \Rightarrow x = 6a \text{ ascissa di minimo relativo proprio}$$

Quindi il volume minimo lo si ha per $x = 6a$ e vale $V_{Cono}(6a) = \frac{\pi a^2}{3}\frac{(6a)^3}{(6a-2a)^2} = \frac{9\pi a^3}{2}$

Punto 2

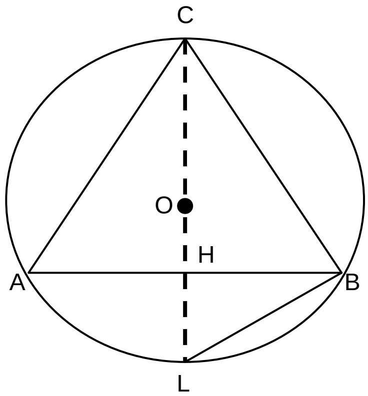
Si determini il valore di *a* per il quale il volume di C, approssimato alla prima cifra decimale, è *31,4 dm*^{3};

Il volume di C è $31{,}4 \text{ dm}^3 = 10\pi \text{ dm}^3$ se $\frac{9\pi a^3}{2} = 10\pi \Rightarrow a^3 = \frac{20}{9} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{20}{9}} \text{ dm}$.

Punto 3

Si determini il volume della sfera S circoscritta a C.

Consideriamo la figura seguente:



Il triangolo CLB è rettangolo per cui $\overline{CB}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{CL} \rightarrow \overline{CL} = \frac{\overline{CB}^2}{\overline{CH}}$. Ora $\overline{CB}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HB}^2$ dove

$\overline{HB} = \frac{3a}{2}$ per cui $\overline{CB}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HB}^2 = 36a^2 + \frac{9a^2}{4} = \frac{153a^2}{4}$ per cui $\overline{CL} = \frac{\overline{CB}^2}{\overline{CH}} = \frac{\frac{153a^2}{4}}{6a} = \frac{51a}{8}$

per cui il raggio della sfera è $R = \frac{\overline{CL}}{2} = \frac{51a}{16}$ ed il volume è

$$V_{Sfera} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi\left(\frac{51a}{16}\right)^3}{3} = \frac{44217}{1024}\pi a^3 = \frac{44217}{1024}\pi \cdot \left(\frac{20}{9}\right) = \frac{24565\pi}{256} \text{ dm}^3$$

PROBLEMA 2

Nel piano riferito ad un sistema di riferimento ortogonale monometrico è data la curva G di equazione:

$$y = 2x - \frac{x^3}{2}$$

Punto 1

Si studi e si rappresenti G;

Dominio: la funzione è definita in tutto R;

Intersezioni asse ascisse: $y = 2x - \frac{x^3}{2} = 0 \Rightarrow x(4 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 2$;

Intersezioni asse ordinate: $x = 0 \Rightarrow y = 0$;

Simmetrie: la funzione è dispari in quanto $y(-x) = 2(-x) - \frac{(-x)^3}{2} = -\left(2x - \frac{x^3}{3}\right) = -y(x)$

Positività: $y = 2x - \frac{x^3}{2} > 0 \rightarrow x(4 - x^2) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0,2)$;

Asintoti: la funzione non ha né asintoti verticali, né orizzontali né obliqui;

Comportamento agli estremi del dominio: $\lim_{x \to \pm\infty} \left(2x - \frac{x^3}{2}\right) = \mp\infty$;

Crescenza e decrescenza: La derivata prima è $y' = 2 - \frac{3x^2}{2}$ per cui

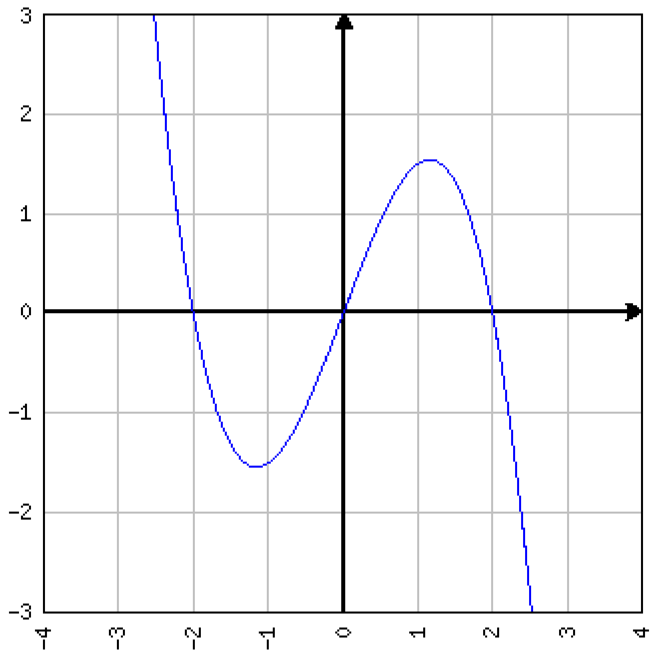
$$y' = 2 - \frac{3x^2}{2} > 0 \Rightarrow -\frac{2\sqrt{3}}{3} < x < \frac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow y = 2x - \frac{x^3}{2} \text{ è strettamente crescente in } \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$y' = 2 - \frac{3x^2}{2} < 0 \Rightarrow x < -\frac{2\sqrt{3}}{3} \vee x > \frac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow y = 2x - \frac{x^3}{2} \text{ è strettamente crescente in } \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$$

$$y' = 2 - \frac{3x^2}{2} = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Concavità e convessità: la derivata seconda è $y'' = -3x = 0 \Rightarrow x = 0$ per cui $(0,0)$ è un flesso a tangente obliqua con tangente $y = 2x$. Inoltre $y''\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 2\sqrt{3} > 0, y''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -2\sqrt{3} < 0$, per cui $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$ è un minimo relativo e $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$ è un massimo relativo.

Il grafico è di seguito presentato:



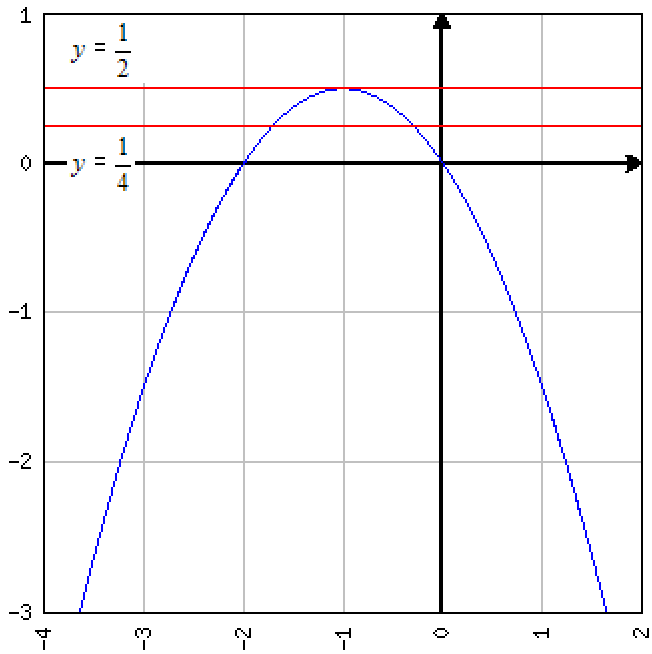
Punto 2

Considerata la retta r di coefficiente angolare m passante per il punto A(2, 0), si determini, al variare di m, il numero delle intersezioni di r con G;

La retta di coefficiente angolare m passante per il punto A(2,0) ha equazione $y = m(x-2)$. Sicuramente la retta e la cubica hanno in comune la soluzione $x = 2$. La soluzione $x = 2$ può essere singola o doppia: è doppia nel momento in cui la retta di equazione $y = m(x-2)$ è tangente alla cubica. In particolare la retta $y = m(x-2)$ è tangente alla cubica $y = 2x - \frac{x^3}{2}$ quando $m = y'(2) = \left[2 - \frac{3x^2}{2}\right]_{x=2} = -4$. Cerchiamo allora quante soluzioni differenti da $x = 2$ $(m \neq -4)$ hanno in comune la retta e la cubica. Intersecando la retta r con la cubica si ha $m(x-2) = 2x - \frac{x^3}{2}$ da cui, dividendo per il fattore $(x-2)$ in quanto si stanno cercando soluzioni differenti da $x = 2$, si ha $m = \frac{-x(x+2)}{2}$. Si tratta quindi di risolvere il sistema $\begin{cases} y = \frac{-x(x+2)}{2} \\ y = m \\ m \neq -4 \end{cases}$. La curva $y = \frac{-x(x+2)}{2}$ è una parabola con concavità verso il basso e vertice in $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ che interseca l'asse delle ascisse in

$(0,0),(-2,0)$; la retta di equazione $y=m$ è parallela all'asse delle ascisse. Il grafico seguente mostra nello stesso riferimento cartesiano la parabola e le rette di equazione $y=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{4}$. Da esso si notano il numero delle soluzioni $x \neq 2$:

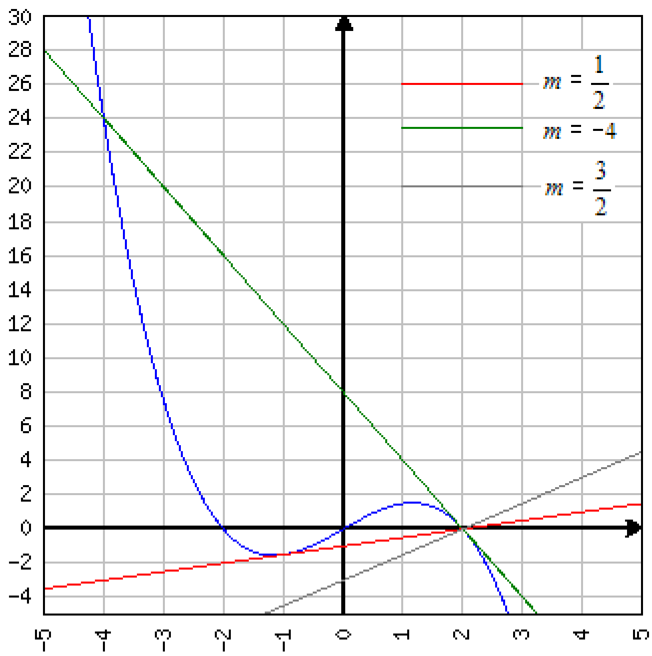
1. nessuna soluzione per $m>\frac{1}{2}$;
2. due soluzioni coincidenti e pari a $x=-1$ per $m=\frac{1}{2}$;
3. due soluzioni distinte $x_{1,2} \neq 2$ per $m<\frac{1}{2} \wedge m \neq -4$.



In conclusione tenendo in conto anche la soluzione $x=2$, singola o doppia che sia, si ha:

1. **una soluzione**, $x=2$, per $m>\frac{1}{2}$;
2. **tre soluzioni** di cui due **coincidenti** $x=-1$ e una $x=2$ se $m=\frac{1}{2}$ o due coincidenti $x=2$ e una $x=-4$ se $m=-4$;
3. **tre soluzioni distinte** per $m<\frac{1}{2} \wedge m \neq -4$.

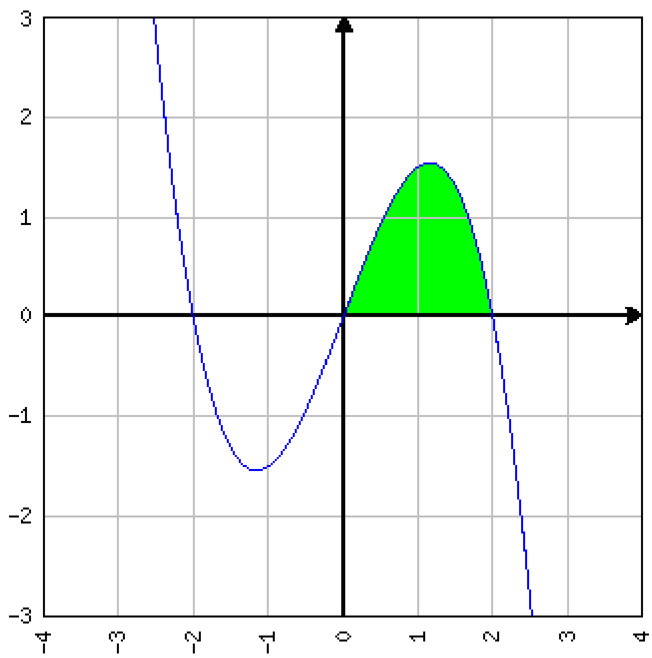
Nell'immagine sottostante viene rappresentata la cubica con la retta tangente in $x = 2$ di equazione $y = -4(x-2)$, la retta tangente in $x = -1$ di equazione $y = \frac{1}{2}(x-2)$ e la retta di equazione $y = \frac{3}{2}(x-2)$



Punto 3

Si calcoli l'area della regione finita di piano R, del primo quadrante, delimitata da G e dall'asse x;

L'area da calcolare è raffigurata in verde nella figura sottostante:



L'area vale $S=\int_0^2\left(2x-\frac{x^3}{2}\right)dx=\left[x^2-\frac{x^4}{8}\right]_0^2=4-2=2$

Punto 4

Si determini il volume del solido generato da R in un giro completo intorno all'asse x.

Il volume vale

$$V=\pi\int_0^2\left(2x-\frac{x^3}{2}\right)^2dx=\pi\int_0^2\left(\frac{x^6}{4}-2x^4+4x^2\right)dx=$$

$$=\pi\left[\frac{x^7}{28}-\frac{2x^5}{5}+\frac{4x^3}{3}\right]_0^2=\pi\left(\frac{32}{7}-\frac{64}{5}+\frac{32}{3}\right)=\frac{256}{105}\pi$$

QUESTIONARIO

Quesito 1

Enunciare il teorema di *de L'Hôpital* e applicarlo per dimostrare che:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^7}{2^x}$$

Enunciamo la regola di de L' Hôpital:

Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite in un intorno di $+\infty$, sono derivabili in tale intorno, con $g'(x)\neq 0$; se le due funzioni, per $x\to+\infty$ tendono entrambe a 0 o a ∞ e se esiste il limite del rapporto delle derivate delle funzioni date, $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora esiste anche il limite del rapporto delle funzioni $\frac{f(x)}{g(x)}$ e vale $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Nel caso in esame è possibile applicare tale teorema e, dopo averlo applicato 7 volte si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^7}{2^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7\cdot x^6}{\ln 2\cdot 2^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7\cdot 6\cdot x^5}{(\ln 2)^2\cdot 2^x}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{7!}{(\ln 2)^7\cdot 2^x}=0$$

Si osservi anche che $D^n\left[x^n\right]=n!$ se $n\geq 1$, e $D^n\left[2^x\right]=(\ln 2)^n\cdot 2^x$.

In alternativa, poiché $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^7}{2^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2^{\frac{x}{7}}}\right)^7$, calcolando il limite $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2^{\frac{x}{7}}}\right)$ si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2^{\frac{x}{7}}}\right)\overset{\substack{De\\ L'Hopital}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2^{\frac{x}{7}}\cdot\frac{\ln 2}{7}}=0.$$

Quesito 2

Mostrare, eventualmente anche con esempi, che la derivata del prodotto di due o più funzioni non è il prodotto delle derivate.

Dimostriamo che la derivata del prodotto di due funzioni $y(x)=f(x)\cdot g(x)$ è $y'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$. La derivata per definizione è il limite del rapporto incrementale per cui $y'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}$ riscrivibile come

$$y'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)+\overbrace{f(x)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x+h)}^{\text{aggiungendo e sottraendo la stessa quantità } f(x)\cdot g(x+h)}-f(x)\cdot g(x)}{h}$$

. Spezziamo il limite in due parti e otteniamo:

$$y'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)[f(x+h)-f(x)]}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\cdot[g(x+h)-g(x)]}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}g(x+h)\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]}{h}}_{f'(x)}+\lim_{h\to 0}g(x+h)\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{[g(x+h)-g(x)]}{h}}_{g'(x)}=$$
$$=f'(x)\cdot\lim_{h\to 0}g(x+h)+g'(x)\cdot\lim_{h\to 0}g(x+h)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

Un primo esempio è la parabola di equazione $y=x^2=x\cdot x$: il prodotto delle derivate delle funzioni componenti è 1 mentre la derivata è $y'=2x$; analogamente per la cubica $y=x^3=x\cdot x\cdot x$ il prodotto delle derivate delle tre funzioni componenti è 1 mentre la derivata è $y'=3x^2$.

Quesito 3

Dimostrare che se un polinomio *p(x)* è divisibile per $(x-a)^m$ allora $p'(x)$ è divisibile per $(x-a)^{m-1}$

Se il polinomio *p(x)* è divisibile per $(x-a)^m$ esso può essere scritto come $p(x)=(a-x)^m\cdot g(x)$ la cui derivata è $p'(x)=m(a-x)^{m-1}\cdot g(x)+(a-x)^m\cdot g'(x)=(a-x)^{m-1}\cdot[m\cdot g(x)+(a-x)\cdot g'(x)]$ da cui deduciamo la divisibilità di $p'(x)$ per $(x-a)^{m-1}$.

Quesito 4

Calcolare la derivata della funzione:

$$\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\arctan x$$

Dal risultato quali conseguenze se ne possono trarre per la f(x)? E' una costante?

La funzione $f(x)=\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\arctan x\right)$ è definita per $\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|\le 1$. In realtà essendo $\sqrt{1+x^2}>x\ \forall x\in R$, deduciamo che il dominio di $f(x)=\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\arctan x\right)$ è R. La derivata prima è:

$$f'(x)=\frac{\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{1+x^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{\dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$$

Quindi la derivata è nulla, ed essendo $f(x)=\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\arctan x\right)$ definita in tutto R, deduciamo che la funzione è costante in tutto R e il valore della costante può essere trovato valutando la funzione in un punto del dominio, ad esempio $f(0)=0$.

Quesito 5

Si ricavi la formula che dà il numero delle combinazioni semplici di n elementi a k a k.

Si dicono combinazioni semplici di n elementi diversi presi a k (con n>k) a k (o di classe k) tutti i possibili gruppi che si possono formare prendendo k dagli n elementi in modo da considerare distinti soltanto quei gruppi che differiscono per la natura di almeno un elemento. Si dicono, invece, disposizioni semplici di n elementi diversi presi a k a k (o di classe k) (con n>k) tutti i possibili gruppi che si possono formare prendendo k degli n elementi in modo da considerare distinti quei gruppi che differiscono, o per la natura degli elementi, o per il loro ordine. Confrontando la definizione di *combinazioni semplici* con quella delle *disposizioni semplici*, potremo dire che per esempio, i due gruppi $\{abc,acb\}$ sono due disposizioni diverse (differiscono per l'ordine degli elementi) ma formano la stessa combinazione.

Dal precedente esempio risulta evidente che ogni combinazione può generare tante disposizioni quante sono le permutazioni dei suoi k elementi.

Il numero disposizioni semplici di n elementi diversi presi a k a k (o di classe k) (con n>k) è dato matematicamente dal prodotto di k numeri interi consecutivi decrescenti a partire da n:

$$D_{n,k}=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\dots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

Il numero di permutazioni semplici di k elementi è dato matematicamente dal numero disposizioni semplici di k elementi presi a k a k:

$$P_k=D_{k,k}=k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\dots\dots\cdot 2\cdot 1=k!$$

Il numero di combinazioni semplici di n elementi diversi presi a k (con n>k) a k (o di classe k) è dato dal rapporto tra disposizioni semplici di n elementi diversi presi a k a k (o di classe k) (con n>k) e permutazioni semplici di k elementi:

$$C_{n,k}=\frac{D_{n,k}}{P_k}=\frac{n!}{(n-k)\cdot k!!}=\binom{n}{k}$$

dove $\binom{n}{k}$ è conosciuto come coefficiente binomiale e la formula $C_{n,k}=\frac{D_{n,k}}{P_k}=\frac{n!}{(n-k)\cdot k!!}=\binom{n}{k}$ è nota come legge dei tre fattoriali.

Quesito 6

Verificare che:

$$\int_{e}^{e^2} x\log(x)dx = \frac{e^2}{4}\left(3e^2 - 1\right)$$

Integrando per parti si ha:

$$\int_{e}^{e^2} x\log(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\left(\log(x) - \frac{1}{2}\right)\right]_{e}^{e^2} = \frac{e^4}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{e^2}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{e^2}{4}\left(3e^2 - 1\right)$$

Quesito 7

Siano a e b due numeri positivi diversi da 1. Dimostrare che:

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

Per la proprietà del cambiamento di base dei logaritmi si ha $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$ per cui

$$\log_a b \cdot \log_b a = \log_b a \cdot \frac{1}{\log_b a} = 1$$

Quesito 8

La somma di due numeri non negativi è 16. Quale è il valore più basso che assume la somma dei loro quadrati? Quale il valore più alto?

Siano $0 \le x \le 16, 0 \le y \le 16$ per cui $x + y = 16$. La somma dei quadrati è $S(x,y) = x^2 + y^2$ che può essere ricondotta a funzione di una sola delle due variabili: $S(x) = x^2 + (16 - x)^2 = 2x^2 - 32x + 256$. La funzione $S(x) = 2x^2 - 32x + 256$ è una parabola con concavità rivolta verso l'alto che raggiunge il suo minimo nell'ascissa del vertice, per cui la summa dei quadrati è minima per $x = \frac{32}{4} = 8$ e vale $S_{MIN} = S(8) = 128$. Il massimo della somma dei quadrati può essere raggiunto solo agli estremi dell'intervallo [0,16]. In tal caso, vista la simmetria del problema, il valore massimo è uguale agli estremi dell'intervallo [0,16] e vale $S_{MAX} = S(0) = S(16) = (16)^2 = 256$.