

Esame di stato

Sui coefficienti binomiali

Quesito n.3 del Questionario della Prova d'Esame di Stato dei Corsi Tradizionali, sessione suppletiva, dell'anno 2001

Calcolare se esiste un numero n per il quale risulti $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 1.048.576$

Soluzione

Si tratta di stabilire se esiste un numero naturale n che verifica l'uguaglianza richiesta. Faremo vedere che esiste un solo numero intero che ha detta proprietà.

Ricordiamo che sussiste la seguente regola per lo sviluppo della potenza n -esima del binomio $a+b$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

conosciuta come regola di Newton per lo sviluppo della potenza del binomio. Ebbene, con $a=b=1$ la regola diventa

$$(a+b)^n = (1+1)^n = 2^n$$

e quindi si ha anche

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

Osservato che 1.046.576 è il valore della potenza 2^{20} , si conclude che il numero richiesto è $n=20$.

Esame di stato

(Sulla funzione integrale e la regola di de l'Hôpital)

Quesito n.4 del Questionario della Prova d'Esame di Stato dei Corsi Tradizionali, sessione suppletiva, dell'anno 2001

- 1) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, derivabile con derivata continua in tutto il campo reale, tale che $f(0)=1$ ed $f'(0)=2$. Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt - x}{\cos 2x - 1}$$

Soluzione

La funzione $f(x)$ essendo derivabile su tutto l'asse reale è anche continua e perciò esiste ed è finito l'integrale definito $\int_0^x f(t)dt$ per ogni x reale. Inoltre, il teorema fondamentale del calcolo integrale assicura che la funzione $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ è una primitiva della funzione $f(x)$ e dunque risulta $F'(x) = f(x)$.

La funzione $F(x)$ è definita su tutto l'asse reale ed essendo derivabile è anche continua, perciò risulta $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0)$; poiché $\int_0^0 f(t)dt = 0$ si deduce che $F(0)=0$.

Da quanto detto emerge che il limite in esame si presenta nella forma 0/0 e poiché le funzioni che figurano al numeratore e al denominatore della frazione sono continue e derivabili risultano soddisfatte le condizioni per l'applicazione della regola di de l'Hôpital al limite. Appliciamola.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt - x}{\cos 2x - 1} \stackrel{H.}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{-2\sin 2x}$$

Il limite ottenuto si presenta ancora nella forma 0/0 perché sono continue le due funzioni $f(x)$, $\sin 2x$ e per ipotesi risulta $f(0)=1$, oltre che essere anche $\sin(2 \cdot 0)=0$. Sussistono le condizioni per applicare ancora una volta la regola di de l'Hôpital per lo studio del limite. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{-2\sin 2x} \stackrel{H.}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{-4\cos 2x}$$

Ricordando ora che per ipotesi è continua anche la funzione $f'(x)$ su tutto l'asse reale e che risulta $f'(0) = 2$, il limite ottenuto ha valore finito e risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{-4\cos(2 \cdot 0)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Conclusione

Il limite proposto esiste ed ha valore $-1/2$ in virtù di quanto previsto dal teorema di de l'Hôpital.

Esame di stato 2001

(Calcolo di derivate)

Quesito n.5 del Questionario della Prova d'Esame di Stato dei Corsi Tradizionali, sessione suppletiva, dell'anno 2001

2) Dimostrare che la derivata, rispetto ad x , della funzione a^x , dove a è un numero reale positivo diverso da 1, è $a^x \log a$.

Soluzione

Ricordiamo che la derivata prima in un punto reale x_0 di una funzione $f(x)$ di variabile reale che abbia x_0 come punto di accumulazione per il suo dominio è definita come il valore del seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

qualora questo esista e sia finito. Il rapporto di cui si calcola il limite è detto rapporto incrementale della funzione relativo al punto x_0 . Ponendo $x - x_0 = h$ il limite si può esprimere anche nella seguente forma

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ciò premesso, considerato che la funzione esponenziale $f(x) = a^x$ è definita per ogni x reale, si tratta di provare che risulta

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \log a$$

Ebbene, osserviamo intanto che possiamo scrivere

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot (a^h - 1)}{h} = a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h};$$

inoltre ricordiamo che :

- sussiste il limite notevole $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, essendo e il numero di Nepero;
- sussiste l'uguaglianza numerica $y = e^{\log y}$, per ogni $y > 0$ e dunque risulta anche $a^h = e^{\log a^h} = e^{h \log a}$, essendo per ipotesi $a > 0$.

Per quanto precede, possiamo scrivere il limite del rapporto incrementale in questione nella seguente forma

$$a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h \log a} - 1}{h}$$

A questo punto, sapendo che $a > 0 \wedge a \neq 1$ si deduce che $\log a \neq 0$ e possiamo moltiplicare numeratore e denominatore della frazione argomento del limite per $\log a$ ottenendo la forma equivalente

$$a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h \log a} - 1}{h \cdot \log a} \cdot \log a = a^x \cdot \log a \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h \log a} - 1}{h \cdot \log a}$$

Ponendo ora $h \log a = t$, osserviamo che

$$h \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0$$

e passando alla nuova forma del limite nella variabile t , in virtù del limite notevole richiamato sopra, possiamo scrivere in definitiva

$$a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot \log a \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = a^x \cdot \log a$$

C.V.D.

Esame di stato

Quesito sulla funzione integrale

Quesito n.7 del Questionario della Prova d'Esame di Stato dei Corsi Tradizionali, sessione suppletiva, dell'anno 2001

Una primitiva della funzione $f(x)$ è x^2+2x . Se è possibile calcolare l'integrale $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$, determinare il valore dell'integrale. In caso contrario spiegare perché il calcolo non è possibile.

Soluzione

Il calcolo dell'integrale è possibile e lo faremo vedere in due modi diversi.

Primo metodo

Tenendo presente la definizione di primitiva di una funzione reale di variabile reale, si sa dunque che $f(x)$ coincide con la funzione derivata prima del polinomio x^2+2x . Dunque

$$f(x) = D(x^2 + 2x) = 2x + 2$$

Avendo ottenuto l'espressione analitica di $f(x)$, si può dedurre l'espressione di $f\left(\frac{x}{2}\right)$; si ha

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \cdot \frac{x}{2} + 2 = x + 2$$

Possiamo ora procedere con il calcolo dell'integrale definito richiesto.

$$\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int_0^1 (x+2)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} + 2\right) - 0 = \frac{5}{2}$$

Secondo metodo

Nell'integrale definito effettuiamo la sostituzione di variabile ponendo

$$\frac{x}{2} = t \rightarrow x = 2t \quad \text{e} \quad dx = 2dt.$$

La funzione $\varphi(t)=2t$ utilizzata è derivabile ed invertibile su tutto l'asse reale, dunque è idonea per la sostituzione di variabile. I nuovi estremi di integrazione diventano:

$$\text{con } x=0 \rightarrow t=0;$$

$$\text{con } x=1 \rightarrow t = \frac{1}{2}$$

e l'integrale in esame si trasforma come segue

$$\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) 2dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt$$

A questo punto ricordiamo che per effettuare il calcolo dell'integrale definito è necessario determinare una primitiva della funzione integranda e per ipotesi sappiamo che t^2+2t è una primitiva di $f(t)$. Per il calcolo dell'integrale si può dunque scrivere

$$2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt = 2 \left[t^2 + 2t \right]_0^{\frac{1}{2}} = 2 \left(\left(\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \right) - 0 \right) = \frac{5}{2}$$

Come si vede, il valore ottenuto con il secondo procedimento coincide con quello ottenuto con il primo.

Quesito n.9 del Questionario della Prova d'Esame di Stato dei Corsi Tradizionali, sessione suppletiva, dell'anno 2001

Calcolare la deriva della funzione $\sin 2x$ rispetto alla variabile x , ricorrendo alla definizione di derivata di una funzione.

Soluzione

Tenendo presente quanto riportato nel precedente quesito n.2 si tratta di studiare il seguente limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2(x+h) - \sin 2x}{h}$$

Osserviamo che per le formule di addizione per la funzione seno si ha

$$\sin 2(x+h) = \sin(2x+2h) = \sin 2x \cdot \cos 2h + \cos 2x \cdot \sin 2h$$

e dunque il limite in esame diventa

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \cos 2h + \cos 2x \cdot \sin 2h - \sin 2x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot (\cos 2h - 1) + \cos 2x \cdot \sin 2h}{h} = \\ &= \sin 2x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos 2h - 1}{h} + \cos 2x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{h} \end{aligned}$$

A questo punto ricordiamo che sussiste il limite notevole

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad (1)$$

con t espresso in radianti e che pertanto per il secondo limite si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{2h} \cdot 2 = 2 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 2 \cdot 1 = 2, \text{ dunque anche}$$

$$\cos 2x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{h} = 2 \cos 2x; \quad (2)$$

ancora, per il primo limite possiamo scrivere

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos 2h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos 2h - 1) \cdot (\cos 2h + 1)}{h \cdot (\cos 2h + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(1 - \cos^2 2h)}{h \cdot (\cos 2h + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2h + 1} \cdot$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 2h}{h} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{2h} \cdot 2 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} (-\sin 2h) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0 = 0$$

e dunque risulta

$$\sin 2x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos 2h - 1}{h} = \sin 2x \cdot 0 = 0 \quad (3)$$

In conclusione, in virtù del teorema sul limite della somma di due funzioni possiamo affermare che il limite in esame è uguale alla somma dei valori dei due limiti in cui è stato decomposto e quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2(x+h) - \sin 2x}{h} = \sin 2x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos 2h - 1}{h} + \cos 2x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{h} = 0 + 2 \cos 2x = 2 \cos 2x$$

Ed in definitiva, dalla definizione di derivata prima nel punto x , che la derivata prima della funzione $f(x) = \sin 2x$ nel generico punto x è

$$f'(x) = 2 \cos 2x$$