

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
a.s. 2000/2001
Tema di MATEMATICA
Sessione suppletiva CORSO DI ORDINAMENTO

PROBLEMA 1

Si consideri la funzione reale f_m di variabile reale x tale che:

$$f_m = \frac{x^2}{|x - 2m| + m},$$

dove m è un parametro reale non nullo.

- a) Trovare gli insiemi di definizione, di continuità e di derivabilità della funzione.
- b) Indicata con C_1 la curva rappresentativa della funzione $f_1(x)$ corrispondente ad $m=1$, studiarla e disegnarla in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, dopo aver determinato, in particolare, le equazioni dei suoi asintoti e il comportamento nel punto A di ascissa 2.
- c) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva C_1 e dalla retta parallela all'asse delle ascisse condotta per il punto A.

PROBLEMA 2

Una piramide retta, di vertice V, ha per base il triangolo ABC, rettangolo in A, la cui area è $24 a^2$, dove a è una lunghezza assegnata. Si sa inoltre che $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{3}{5}$ e che il piano della faccia VAB della

piramide forma col piano della base ABC un angolo φ tale che $\sin \varphi = \frac{12}{13}$.

- a) Calcolare l'altezza della piramide.
- b) Controllato che essa è $\frac{24}{5}a$, calcolare la distanza del vertice C dal piano della faccia VAB.
- c) Condotta, parallelamente alla base ABC, un piano α che sechi la piramide e considerato il prisma retto avente una base coincidente con il triangolo sezione e per altezza la distanza di α dalla base ABC, calcolare per quale valore di tale distanza il prisma ha volume massimo.
- d) Il prisma di volume massimo ha anche la massima area totale?

QUESTIONARIO

1. Considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, si prendano in esame le due seguenti proposizioni:

A: condizione necessaria e sufficiente affinché $f(x)$ sia definita in un punto a è che sia continua in a .

B: condizione necessaria e sufficiente affinché $f(x)$ sia continua in un punto a è che sia derivabile in a .

Una sola delle seguenti combinazioni è corretta: individuarla e fornire un'esauriente giustificazione della risposta:

a) A vera – B vera; b) A vera – B falsa; c) A falsa – B vera; d) A falsa – B falsa.

2. Si consideri il cubo di spigoli AA' , BB' , CC' , DD' , in cui due facce opposte sono i quadrati $ABCD$ e $A'B'C'D'$. Indicato con E il punto medio dello spigolo AB , sia CF la retta perpendicolare a DE condotta per C . I piani $D'DE$ e $C'CF$ dividono il cubo in quattro parti. Calcolare a quale frazione del cubo equivale ciascuna di esse.

3. Calcolare se esiste un numero naturale n per il quale risulti:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 1048576.$$

4. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, derivabile con derivata continua in tutto il campo

reale, tale che: $f(0) = 1$ ed $f'(0) = 2$. Calcolare: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt - x}{\cos 2x - 1}$.

5. Dimostrare che la derivata, rispetto ad x , della funzione a^x , dove a è un numero reale positivo diverso da 1, è $a^x \ln a$.

6. Fra i rettangoli di dato perimetro determinare quello di area massima.

7. Una primitiva della funzione $f(x)$ è $x^2 + 2x$. Se è possibile calcolare $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$, determinare il valore dell'integrale. In caso contrario spiegare perché il calcolo non è possibile.

8. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sia T un trapezoide di base $[a, b]$ relativo alla funzione $f(x)$, continua in tale intervallo. Dimostrare la formula che esprime il volume del solido generato dal trapezoide quando ruota di un giro completo attorno all'asse x .

9. Calcolare la derivata della funzione $\sin 2x$ rispetto alla variabile x , ricorrendo alla definizione di derivata di una funzione

10. Considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, derivabile almeno due volte in un dato punto a , affinché la funzione $f(x)$ abbia in a un punto di flesso la condizione $f''(a) = 0$ è:

- a) necessaria e sufficiente;
- b) necessaria ma non sufficiente;
- c) sufficiente ma non necessaria.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

PROBLEMA1Punto 1

- Dominio di definizione

Il dominio della funzione $f_m = \frac{x^2}{|x-2m|+m}$ è dato da $x: |x-2m|+m \neq 0$. Si presentano 2 possibilità:

1. $m > 0$: la condizione $x: |x-2m|+m \neq 0$ è sempre soddisfatta;
2. $m < 0$: la condizione $x: |x-2m|+m \neq 0$ è soddisfatta per $x-2m \neq \pm m \Rightarrow x \neq \{m, 3m\}$.

Il dominio di definizione di $f_m = \frac{x^2}{|x-2m|+m}$ è dunque $D_f: \begin{cases} R & \text{se } m > 0 \\ R - \{m, 3m\} & \text{se } m < 0 \end{cases}$.

- Dominio di continuità

Per quanto riguarda la continuità possiamo affermare che la funzione è continua in

$D_c: \begin{cases} R & \text{se } m > 0 \\ R - \{m, 3m\} & \text{se } m < 0 \end{cases}$ e nei punti $x = m, x = 3m$ presenta due discontinuità di seconda specie.

- Dominio di derivabilità

La funzione $f_m = \frac{x^2}{|x-2m|+m}$ è riscrivibile nel modo seguente:

$$f_m = \frac{x^2}{|x-2m|+m} = \begin{cases} \frac{x^2}{x-m} & \text{se } x \geq 2m \wedge x \neq m \\ \frac{x^2}{3m-x} & \text{se } x < 2m \wedge x \neq 3m \end{cases}; \text{ di conseguenza la derivata prima è}$$

$$f'_m = \begin{cases} \frac{x^2 - 2xm}{(x-m)^2} & \text{se } x \geq 2m \wedge x \neq m \\ \frac{6mx - x^2}{(3m-x)^2} & \text{se } x < 2m \wedge x \neq 3m \end{cases}; \text{ nei punti in cui la funzione non è continua non è}$$

neppure derivabile, ed inoltre va analizzata la natura del punto $x = 2m$. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 2m^+} f'_m = \lim_{x \rightarrow 2m^+} \left[\frac{x^2 - 2xm}{(x-m)^2} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2m^-} f'_m = \lim_{x \rightarrow 2m^-} \left[\frac{6mx - x^2}{(3m-x)^2} \right] = 8m$$

Ricordando che $m \neq 0$ per ipotesi, il punto $x = 2m$ è un punto angoloso e quindi di non

derivabilità. In conclusione il dominio di derivabilità è $D_d : \begin{cases} R - \{2m\} & \text{se } m > 0 \\ R - \{m, 2m, 3m\} & \text{se } m < 0 \end{cases}$.

Punto 2

$$\text{Per } m = 1 \text{ si ha } f_1 = \frac{x^2}{|x-2|+1} = \begin{cases} \frac{x^2}{x-1} & \text{se } x > 2 \\ 4 & \text{se } x = 2 \\ \frac{x^2}{3-x} & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Studiamo la funzione:

- *Dominio*: essendo $m = 1 > 0$ il dominio è R ;
- *Intersezione asse ascisse*: $f_1 = \frac{x^2}{|x-2|+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- *Intersezione asse ordinate*: $x = 0 \Rightarrow y = 0$;
- *Positività*: la funzione è sempre non negativa in quanto sia il numeratore che il denominatore sono sempre non negativi, cioè $f_1 \geq 0 \forall x \in R$;
- *Asintoti verticali*: essendo $m = 1 > 0$ il dominio di continuità è tutto R da cui deduciamo l'assenza di asintoti verticali;
- *Asintoti orizzontali*: non ve ne sono in quanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{|x-2|+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{|x-2|+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{3-x} \right) = +\infty$$

- *Asintoti obliqui*: hanno equazione $y = mx + q$. Si hanno due casi:

$$1. \quad x > 2: \quad m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 - x} \right) = 1, q = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f_1 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x-1} \right) = 1$$

per cui $y = x + 1$ è asintoto obliquo destro:

$$2. \quad x < 2:$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{3x - x^2} \right) = -1, q = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f_1 - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{3-x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x}{3-x} \right) = -3 \text{ per}$$

cui $y = -x - 3$ è asintoto obliquo sinistro:

- *Crescenza e decrescenza*: la derivata prima è $f_1' = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} & \text{se } x > 2 \\ \frac{6x - x^2}{(3-x)^2} & \text{se } x < 2 \end{cases}$; per $x > 2$ la

derivata prima è $f_1' = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ che è sempre positiva, per cui in $(2, +\infty)$ la funzione è

strettamente crescente; per $x < 2$ la derivata prima è $f_1' = \frac{x(6-x)}{(3-x)^2}$ per cui

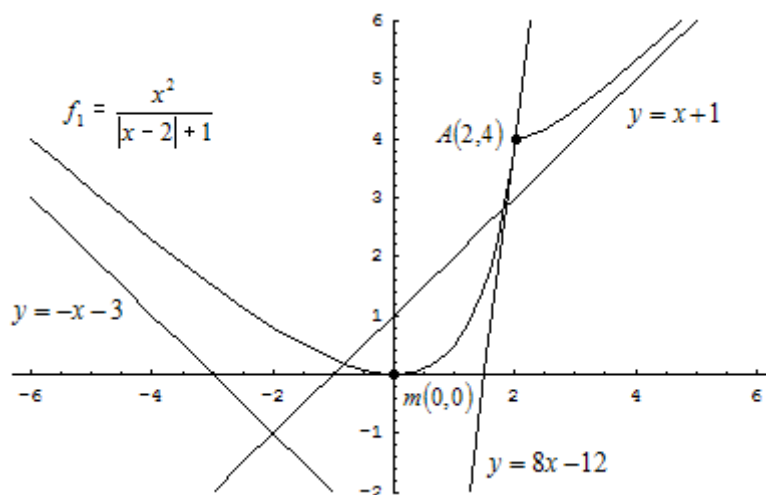
$f_1' = \frac{x(6-x)}{(3-x)^2} > 0 \Rightarrow 0 < x < 2$, cioè la funzione è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ e

strettamente crescente in $(0, 2)$. Quindi il punto $m(0,0)$ è di minimo relativo ed assoluto. Il

punto $A(2,4)$ è un punto angoloso con tangente destra di equazione $y = 4$ e tangente sinistra di equazione $y = 8x - 12$;

- *Concavità e convessità*: per $x > 2$ la derivata seconda è $f_1'' = \frac{2}{(x-1)^3}$ che è sempre positiva, per cui in $(2, +\infty)$ la funzione ha concavità verso l'alto; per $x < 2$ la derivata seconda è $f_1'' = \frac{18}{(3-x)^3}$ che è sempre positiva, per cui anche in $(-\infty, 2)$ la funzione ha concavità verso l'alto; in conclusione la funzione presenta sempre concavità verso l'alto.

Di seguito il grafico:



Punto c

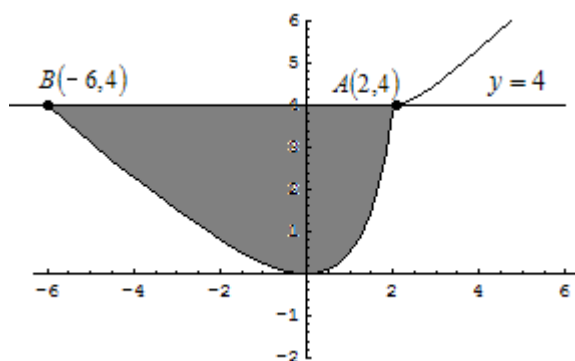
La retta passante per $A(2,4)$ e parallela all'asse delle ascisse ha equazione $y = 4$. Le intersezioni di

$y = 4$ con la curva di equazione $f_1 = \frac{x^2}{|x-2|+1}$ si ricavano risolvendo l'equazione $\frac{x^2}{|x-2|+1} = 4$,

cioè $\begin{cases} x^2 = 4(x-1) & \text{se } x \geq 2 \\ x^2 = 4(3-x) & \text{se } x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0 & \text{se } x \geq 2 \\ x^2 + 4x - 12 = 0 & \text{se } x < 2 \end{cases}$ da cui

$\begin{cases} (x-2)^2 = 0 & \text{se } x \geq 2 \\ (x+6)(x-2) = 0 & \text{se } x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 & \text{se } x \geq 2 \\ x = -6 \vee x = 2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$. Le intersezioni sono allora

$A(2,4), B(-6,4)$. L'area da calcolare è di seguito colorata in grigio:



Tale area vale:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-6}^2 \left[4 - \left(\frac{x^2}{3-x} \right) \right] dx = \int_{-6}^2 \left[4 - \left(\frac{x^2-9}{3-x} + \frac{9}{3-x} \right) \right] dx = \int_{-6}^2 \left[4 - \left(-x-3 + \frac{9}{3-x} \right) \right] dx = \\ &= \int_{-6}^2 \left(x+7 - \frac{9}{3-x} \right) dx = \left[\frac{(x+7)^2}{2} + 9 \ln|3-x| \right]_{-6}^2 = \left(\frac{81}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} + 9 \ln 9 \right) = 40 - 18 \ln 3 \end{aligned}$$

PROBLEMA2

Punto a

Consideriamo la figura a lato in cui è rappresentata la piramide con base un triangolo rettangolo in A in cui è inscritta una circonferenza di raggio \overline{OH} . Il cateto AC per il teorema di Pitagora, sapendo che $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{3}{5}$, misura

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{\frac{25}{9} \overline{AB}^2 - \overline{AB}^2} = \frac{4}{3} \overline{AB}.$$

L'area del triangolo rettangolo è allora

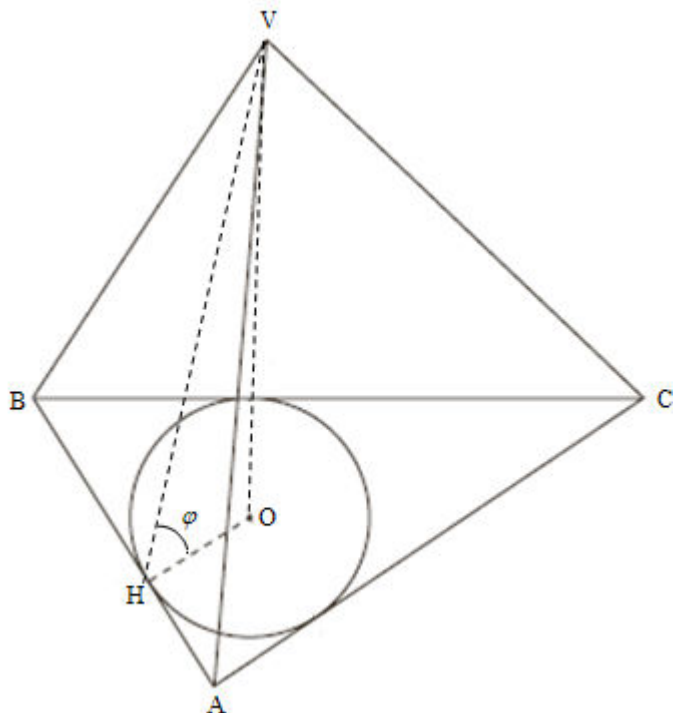
$$S_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2} = \frac{2}{3} \overline{AB}^2.$$

Imponendo $S_{ABC} = \frac{2}{3} \overline{AB}^2 = 24a^2$ ricaviamo

$$\overline{AB} = 6a, \overline{AC} = 8a, \overline{BC} = 10a.$$

Il raggio della circonferenza inscritta è pari al rapporto tra area e semiperimetro del triangolo rettangolo e cioè $\overline{OH} = \frac{24a^2}{12a} = 2a$, per cui l'altezza della piramide misura

$$\overline{VO} = \overline{OH} \cdot \tan \varphi = \overline{OH} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \overline{OH} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = 2a \cdot \frac{\frac{12}{13}}{\sqrt{1 - \frac{144}{169}}} = 2a \cdot \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{24}{5} a.$$



Punto b

Se indichiamo con h la distanza di C dalla faccia VAB, essa è altezza della piramide di base VAB.

L'area del triangolo VAB è $S_{VAB} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{VH}}{2}$ dove $\overline{VH} = \sqrt{\overline{VO}^2 + \overline{OH}^2} = \sqrt{\frac{576}{25} a^2 + 4a^2} = \frac{26}{5} a$;

di conseguenza $S_{VAB} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{VH}}{2} = \frac{6a \cdot \frac{26}{5} a}{2} = \frac{78}{5} a^2$ cui corrisponde il volume della piramide

$V = \frac{S_{VAB} \cdot h}{3} = \frac{26}{5} a^2 h$. Ma il volume della piramide è anche pari a

$V = \frac{S_{ABC} \cdot \overline{VO}}{3} = \frac{24a^2 \cdot \frac{24}{5} a}{3} = \frac{192}{5} a^3$; imponendo l'uguaglianza tra i due volumi si ha

$$\frac{26}{5}a^2h = \frac{192}{5}a^3 \Rightarrow h = \frac{96}{13}a.$$

Punto c

Consideriamo la figura a lato rappresentante la geometria

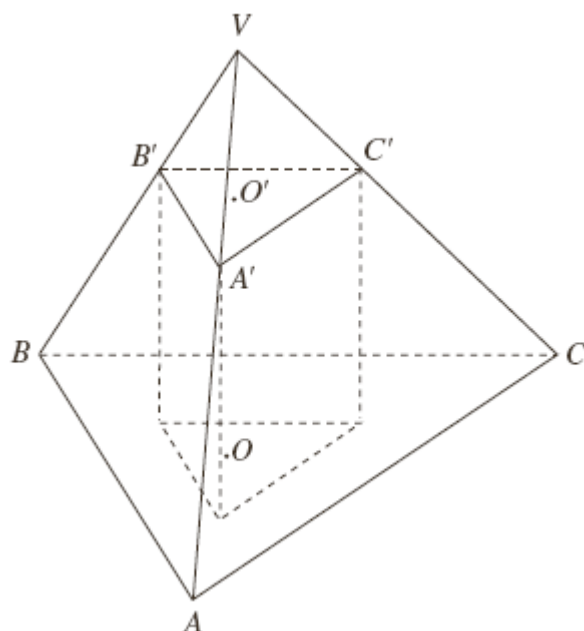
del quesito. Poniamo $\overline{VO'} = x$ con $0 < x < \frac{24}{5}a$, per cui

l'altezza del prisma è $\overline{OO'} = \left(\frac{24}{5}a - x\right)$.

I triangoli ABC e A'B'C' sono simili in quanto il piano α è parallelo alla base, per cui vale la seguente proporzione tra perimetri di base ed altezze:

$$2p_{ABC} : 2p_{A'B'C'} = \overline{VO} : \overline{VO'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2p_{A'B'C'} = 2p_{ABC} \cdot \frac{\overline{VO'}}{\overline{VO}} = 24a \cdot \left(\frac{x}{\frac{24}{5}a}\right) = 5x.$$



Dalla similitudine tra i triangoli ABC ed A'B'C' deduciamo che i lati del triangolo A'B'C' stanno nello stesso rapporto dei lati di ABC e cioè 3, 4, 5, cioè $A'B':B'C':A'C'=3:4:5$ da cui componendo la proporzione si ricava

$$(A'B'+B'C'+A'C'):A'B' = (3+4+5):AB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2p_{A'B'C'} : 2p_{ABC} = \overline{A'B'} : \overline{AB} \Rightarrow \overline{A'B'} = \overline{AB} \cdot \frac{2p_{A'B'C'}}{2p_{ABC}} = 6a \cdot \frac{5x}{24a} = \frac{5}{4}x.$$

Di conseguenza $\overline{A'C'} = \frac{5}{3}x$, $\overline{B'C'} = \frac{25}{12}x$ e l'area del triangolo A'B'C' è

$$S_{A'B'C'} = \frac{\overline{A'B'} \cdot \overline{A'C'}}{2} = \frac{25}{24}x^2. \quad \text{Il volume del prisma è}$$

$$V_P(x) = S_{A'B'C'} \cdot \overline{OO'} = \frac{25}{24}x^2 \cdot \left(\frac{24}{5}a - x\right) = 5ax^2 - \frac{25}{24}x^3 \quad \text{con } 0 < x < \frac{24}{5}a. \quad \text{Il valore massimo del}$$

volume lo calcoliamo mediante derivazione: $V'_P(x) = 10ax - \frac{25}{8}x^2$ per cui

$$V'_P(x) = 10ax - \frac{25}{8}x^2 > 0 \xrightarrow{0 < x < \frac{24}{5}a} 0 < x < \frac{16}{5}a$$

$$V'_P(x) = 10ax - \frac{25}{8}x^2 < 0 \xrightarrow{0 < x < \frac{24}{5}a} \frac{16}{5}a < x < \frac{24}{5}a$$

da cui deduciamo che il volume massimo lo si ha per $x = \frac{16}{5}a$ e quindi quando l'altezza del prisma

misura $\overline{OO'} = \left(\frac{24}{5}a - \frac{16}{5}a \right) = \frac{8}{5}a$ e tale volume massimo vale

$$V_P\left(\frac{16}{5}a\right) = 5a \cdot \left(\frac{16}{5}a\right)^2 - \frac{25}{24}\left(\frac{16}{5}a\right)^3 = \frac{256}{15}a^3.$$

Punto d

L'area totale del prisma è pari alla somma delle due aree di base e dell'area laterale:

$$\begin{aligned} S_P(x) &= 2S_{A'B'C'} + 2p_{A'B'C'} \cdot \overline{OO'} = \frac{25}{12}x^2 + 5x \cdot \left(\frac{24a - 5x}{5} \right) = 24ax - \frac{35}{12}x^2 \\ &= \frac{(24a - 5x)(24a + 7x)}{12} = -\frac{35}{12}x^2 + 4ax + 48a^2 \quad \text{con } 0 < x < \frac{24}{5}a. \end{aligned}$$

Notiamo che l'area totale è un arco di parabola con concavità verso il basso che raggiunge il suo massimo nell'ascissa del vertice e cioè in $x = -\frac{24a}{-35} = \frac{144}{35}a$ cui corrisponde $-\frac{6}{6}$

$\overline{OO'} = \left(\frac{24a}{5} - \frac{144}{35}a \right) = \frac{24}{35}a$. In conclusione il prisma di volume massimo non coincide con quello

di area totale massima in quanto le altezze massime non coincidono.

QUESTIONARIO

Quesito 1

La risposta esatta è D. Infatti la proposizione A è falsa perché una funzione può essere definita in un punto senza esservi continua, come per $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ che è definita ma non è continua in $x = 0$; inoltre la proposizione B è falsa perché una funzione può essere continua e non derivabile in un punto assegnato come per $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ che in $x = 0$ presenta una cuspidale ma è ivi continua.

Quesito 2

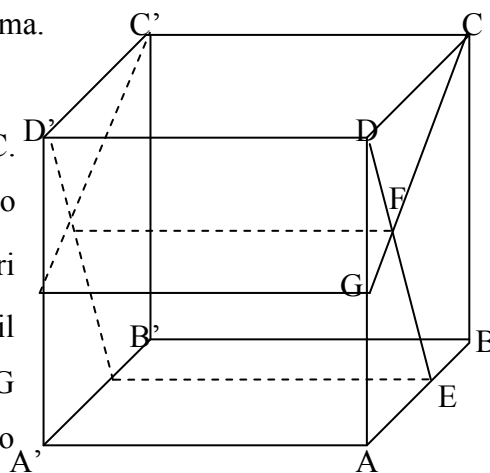
Consideriamo la figura a lato rappresentante la geometria del problema.

Indichiamo con l la misura dello spigolo del cubo e con V_1, V_2, V_3, V_4

i volumi dei prismi retti di base DFG, DFC, FGAE e FEBC.

Notiamo innanzitutto che i triangoli rettangoli CDG e DAE sono congruenti avendo $AD=DC$ e $\hat{C}GD = \hat{A}ED$ in quanto complementari

di $\triangle ADE$, per cui $DG=AE$. I suddetti triangoli hanno in comune il triangolo DFG , per cui sottraendo ad essi l'area del triangolo DFG deduciamo che il triangolo DFC ed il quadrilatero $FGAE$ hanno stessa area; inoltre, poiché l'altezza dei prismi con base



DFC, FGAE è la stessa e coincide con la lunghezza dello spigolo del cubo, deduciamo che $V_2 = V_3$.

Essendo $\overline{DG} = \overline{AE} = \frac{l}{2}$ si ha per il teorema di Pitagora $\overline{DE} = \overline{CG} = \sqrt{l^2 + \frac{l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{5}}{2}$; per i teoremi

di Euclide si ha invece:

$$\overline{FG} = \frac{\overline{DG}^2}{\overline{CG}} = \frac{l^2/4}{l\sqrt{5}/2} = \frac{l\sqrt{5}}{10}, \overline{DF} = \sqrt{\overline{CF} \cdot \overline{FG}} = \sqrt{(\overline{CG} - \overline{FG}) \cdot \overline{FG}} = \sqrt{\left(\frac{l\sqrt{5}}{2} - \frac{l\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \frac{l\sqrt{5}}{10}} = \frac{l\sqrt{5}}{5} \quad \text{per}$$

cui l'area del triangolo DFG è $S_{DFG} = \frac{\overline{DF} \cdot \overline{FG}}{2} = \frac{\frac{l\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{l\sqrt{5}}{10}}{2} = \frac{l^2}{20}$ da cui deduciamo

$$V_1 = \frac{l^3}{20} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{20}; \quad \text{di conseguenza} \quad S_{DFC} = S_{FGAE} = S_{CDG} - S_{DFG} = \frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{20} = \frac{l^2}{5} \quad \text{da cui}$$

deduciamo $V_2 = V_3 = \frac{l^3}{5} \Rightarrow \frac{V_2}{V} = \frac{V_3}{V} = \frac{1}{5}$

$$\frac{V_4}{V} = \frac{V - V_1 - V_2 - V_3}{V} = 1 - \frac{V_1}{V} - \frac{V_2}{V} - \frac{V_3}{V} = 1 - \frac{1}{20} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = \frac{11}{20}.$$

Quesito 3

Ricordando che $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ si ha $2^n = 1048576 = 2^{20} \Rightarrow n = 20$.

Quesito 4

Il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt - x}{\cos 2x - 1}$ si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ per cui possiamo applicare il

teorema di De L'Hospital, e ricordando che per il teorema fondamentale del calcolo

integrale $\frac{d\left(\int_0^x f(t)dt\right)}{dx} = f(x)$ si ha $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt - x}{\cos 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{-2 \sin 2x}$; il limite ottenuto si presenta

ancora nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, per cui riapplicando il teorema di De L'Hospital otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt - x}{\cos 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{-2 \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{-4 \cos 2x} = -\frac{f'(0)}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Quesito 5

Applicando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale si ha:

$$\frac{d(a^x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x+h} - a^x}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[a^x \left(\frac{a^h - 1}{h} \right) \right] = a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{a^h - 1}{h} \right) = a^x \cdot \ln a \text{ in cui abbiamo sfruttato il}$$

$$\text{risultato noto } \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{a^h - 1}{h} \right) = \ln a.$$

Quesito 6

Indichiamo con $2p$ il perimetro del rettangolo e con $x, (p-x)$ con $0 < x < p$ le sue dimensioni.

L'area corrispondente vale $S(x) = x(p-x) = xp - x^2$; tale area è un arco di parabola con concavità

rivolta verso il basso che raggiunge il suo massimo nell'ascissa del vertice $x = \frac{p}{2}$. In

corrispondenza di $x = \frac{p}{2}$ il rettangolo degenera in un quadrato, per cui il rettangolo di area

massima è un quadrato di lato $x = \frac{p}{2}$.

Alternativamente possiamo procedere mediante derivazione. In questo caso la derivata prima della

funzione area è $S'(x) = p - 2x$ per cui $S(x)$ è strettamente crescente in $\left(0, \frac{p}{2}\right)$ e strettamente

decrecente in $\left(\frac{p}{2}, p\right)$; inoltre $S''(x) = -2 < 0$ da cui deduciamo la presenza di un massimo relativo per $x = \frac{p}{2}$.

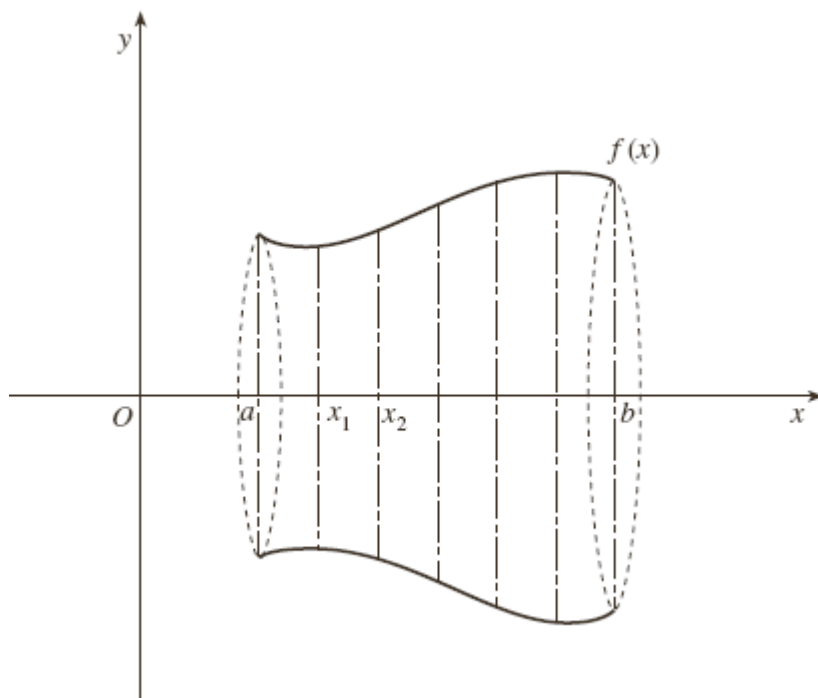
Quesito 7

Operando la sostituzione $t = \frac{x}{2}$ l'integrale $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$ diventa $2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt = 2 \left[t^2 + 2t \right]_0^{\frac{1}{2}} = 2 \left(\frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{5}{2}$.

Quesito 8

Consideriamo la figura a lato in cui è rappresentato il trapezoide delimitato dalla curva di equazione $y = f(x)$, dall'asse delle x e dalle rette $x = a, x = b$.

Se la funzione $f(x)$ è costantemente pari a K , il trapezoide T è un rettangolo e il solido di rotazione conseguente è un cilindro di altezza $(b-a)$ e base $K^2 = f^2(x)$ il cui volume è $V = \pi \cdot K^2 \cdot (b-a) = \pi \cdot f^2(x) \cdot (b-a)$. Se la curva di equazione $y = f(x)$ non è costante, si può procedere seguendo i seguenti passi:



1. si suddivide $[a, b]$ in n sottointervalli equispaziati:

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, \dots, x_{n-1} = x_{n-2} + h, x_n = b \text{ dove } h = \frac{b-a}{n};$$

2. si calcola per ogni sottointervallo il valore minimo m_i e massimo M_i della funzione $f(x)$ che corrispondono alle altezze dei rettangoli corrispondenti al sottointervallo i ;

3. si determinano le somme $v_n = \pi \cdot \sum_{i=1}^n \left[(m_i)^2 \cdot \left(\frac{b-a}{n} \right) \right], V_n = \pi \cdot \sum_{i=1}^n \left[(M_i)^2 \cdot \left(\frac{b-a}{n} \right) \right]$

rappresentanti le somme dei volumi di tutti i cilindri che hanno per base un cerchio di raggio minimo m_i e massimo M_i e che forniscono l'approssimazione per difetto e per eccesso del volume generato dalla rotazione del trapezoide intorno all'asse delle ascisse, $v_n \leq V \leq V_n$;

4. facendo un ragionamento al limite, per $n \rightarrow +\infty$, i sottointervalli di $[a, b]$ aumentano e i rettangoli corrispondenti al sottointervallo i avranno a limite un'altezza infinitesima o nulla; dunque per $n \rightarrow +\infty$, passando dal discreto al continuo, il simbolo di sommatoria può essere sostituito da quello di integrale ed i valori $(m_i)^2 \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)$ e $(M_i)^2 \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)$ coincidono con i valori assunti dalla funzione $f^2(x)$; in sostanza $V = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx$.

Quesito 9

Applicando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale si ha:

$$\frac{d(\sin 2x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(2x+2h) - \sin(2x)}{h} \right]. \text{ Applicando la formula di prostaferesi}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \text{ si ha}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\sin 2x)}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(2x+2h) - \sin(2x)}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{2 \cos(2x+h) \cdot \sin(h)}{h} \right] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [2 \cos(2x+h)] \cdot \overbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h}}^{=1} = 2 \cos 2x. \end{aligned}$$

Quesito 10

La risposta corretta è la b) cioè la condizione è necessaria ma non sufficiente. Come contro esempio consideriamo la funzione $y = x^4$ che ha come derivata seconda $y'' = 12x^2$ che si annulla in $x = 0$ ma è altrove sempre positiva, per cui $y = x^4$ volge sempre concavità verso l'alto e non ammette flessi.