ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

SPERIMENTAZIONI AUTONOME 1

SECONDA PROVA SCRITTA

Tema di MATEMATICA

PROBLEMA 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y), si consideri il luogo geometrico γ dei punti P che vedono il segmento di estremi A(0, 1) e B(2, 1) sotto un angolo $A\hat{P}B$ di ampiezza $\pi/4$ e se ne disegni il grafico.

Nel semipiano delle ordinate $y > 1$ si tracci la retta $y = k$, se ne indichino con C e D le eventuali intersezioni con γ e con C' e D' le loro proiezioni ortogonali su AB. Si determinino i valori di k che rendono massime rispettivamente le seguenti grandezze:

a) il lato obliquo del trapezio isoscele ABDC;
b) la diagonale del rettangolo CDD'C';
c) il cilindro generato dalla rotazione di CDD'C' attorno all'asse del segmento AB.

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y), si consideri la funzione:

$$y = \frac{x^3 + a}{(x+b)^2}$$

- si determinino *a* e *b* in modo che il grafico della curva γ che ne risulta passi per il punto $P(2,0)$ e abbia per asintoto la retta $x = -1$;
- si scriva l'equazione dell'asintoto obliquo t;
- si determini l'angolo α che t forma con la tangente a γ nel punto di intersezione tra γ e t
- si tracci il grafico di: $y = \frac{|x^3 + a|}{(x+b)^2}$

QUESTIONARIO

1. Il rapporto delle aree laterali di due coni aventi basi uguali è uguale al rapporto degli apotemi mentre il rapporto dei loro volumi è uguale al rapporto delle altezze.

2. Verificare, ricorrendo direttamente alla definizione, che:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

3. Enunciare il teorema del *valor medio o di Lagrange* e utilizzarlo per dimostrare che:

$$|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$$

4. Di una funzione *f(x)* si sa che: $f(0) = (1/\log 2)^2$, $f'(0)=0$ e che ha derivata seconda uguale a 2^x. Si può dire quanto vale *f(x)*?

5. Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x) = 2\arcsin x - \arccos(1 - 2x^2)$$

Quali conclusioni se ne possono trarre per la $f(x)$?

6. Dimostrare che:

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}$$

7. Calcolare, con uno dei metodi numerici studiati, un valore approssimato della radice dell'equazione: $x - \log(2 - x) = 0$

8. Tenuto conto che è:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$$

calcolare π con 3 cifre decimali esatte utilizzando una formula d'integrazione approssimata.

9. Tra 15 videogiochi di cui 5 difettosi se ne scelgono 3 a caso. Determinare la probabilità che

a) nessuno dei tre sia difettoso;

b) almeno uno dei tre non sia difettoso

10. Un solido viene trasformato mediante una similitudine di rapporto 3. Dire come variano il suo volume e l'area della sua superficie.

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario.

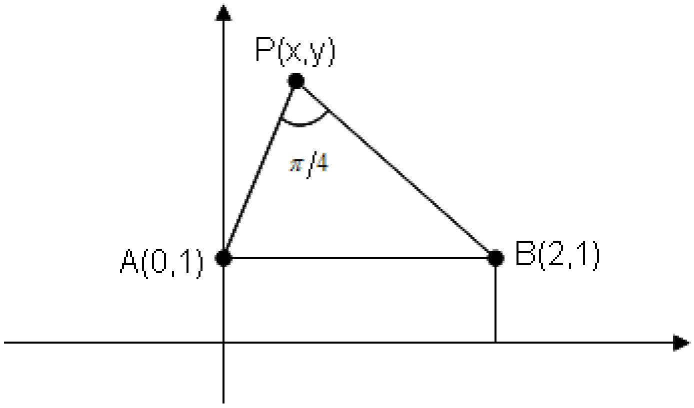
Durata massima della prova : 6 ore
E' consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile e la consultazione del vocabolario d'Italiano.

PROBLEMA 1

Punto 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y), si consideri il luogo geometrico γ dei punti P che vedono il segmento di estremi A(0, 1) e B(2, 1) sotto un angolo $A\hat{P}B$ di ampiezza $\pi/4$ e se ne disegni il grafico.

Si consideri la figura sottostante:



Il coefficiente angolare della retta AP è $m_{AP} = \frac{y-1}{x}$ mentre quello della retta PB è $m_{PB} = \frac{y-1}{x-2}$. Ricordiamo che date due rette la tangente dell'angolo tra di esse è data dalla formula $\tan(\alpha) = \left|\frac{m-m'}{1+m\cdot m'}\right|$ e nel nostro caso si ha $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left|\frac{\frac{y-1}{x} - \frac{y-1}{x-2}}{1+\left(\frac{y-1}{x}\right)\cdot\left(\frac{y-1}{x-2}\right)}\right|$ da cui

$$\left|\frac{\frac{-2(y-1)}{x(x-2)}}{1+\frac{(y-1)^2}{x(x-2)}}\right| = \left|\frac{-2(y-1)}{x(x-2)+(y-1)^2}\right| = 2\left|\frac{(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2-1}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{(x-1)^2+(y-1)^2-1}{(y-1)}\right| = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2-1 = 2(y-1) & \text{se } y \ge 1 \\ (x-1)^2+(y-1)^2-1 = -2(y-1) & \text{se } y < 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2 = 2 & \text{se } y \ge 1 \\ (x-1)^2+y^2 = 2 & \text{se } y < 1\end{cases}$$

Quindi il luogo geometrico descritto da P è dato dalla circonferenza di centro $C_1 = (1,2)$ e raggio $\sqrt{2}$ se $y \ge 1$, e dalla circonferenza di centro $C_2 = (1,0)$ e raggio $\sqrt{2}$ se $y < 1$. Si può anche procedere in maniera alternativa. Ad esempio l'area del triangolo APB è

$S(APB) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AP} \cdot \overline{PB} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ed è anche uguale a $S(APB) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h$. Con le convenzioni usate si ha:

$$\begin{aligned}
&\overline{AP} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \\
&\overline{PB} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} \\
&h = |y-1| \\
&\overline{AB} = 2
\end{aligned}$$

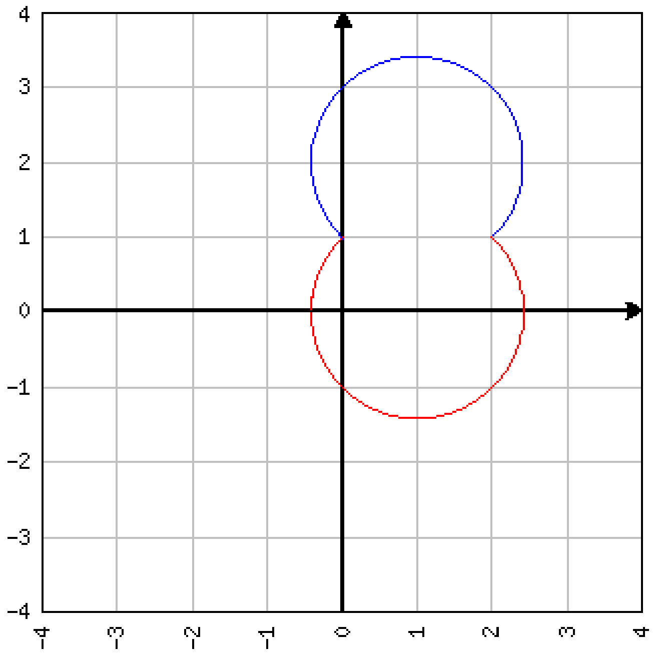
per cui

$$\begin{aligned}
&S(APB) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AP} \cdot \overline{PB} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \cdot \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} \\
&S(APB) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h = |y-1|
\end{aligned}$$

Imponendone l'uguaglianza si ha:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \cdot \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = |y-1| \xrightarrow{\text{Elevando al quadrato}} \\
&\frac{1}{8}\left[x^2 + (y-1)^2\right] \cdot \left[(x-2)^2 + (y-1)^2\right] = (y-1)^2 \Leftrightarrow \\
&\left[x^2(x-2)^2 + \left(x^2 + (x-2)^2\right)(y-1)^2 + (y-1)^4\right] - 8(y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \\
&\left[x^2(x-2)^2 + \left(x^2 + (x-2)^2 - 8\right)(y-1)^2 + (y-1)^4\right] = 0 \Leftrightarrow \\
&\left[x^2(x-2)^2 + 2\left(x^2 - 2x - 2\right)(y-1)^2 + (y-1)^4\right] = 0 \Leftrightarrow \\
&\left[(x-1)^2 + (y-2)^2 - 2\right] \cdot \left[(x-1)^2 + y^2 - 2\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2 \\ (x-1)^2 + y^2 = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Il grafico seguente mostra il luogo geometrico.



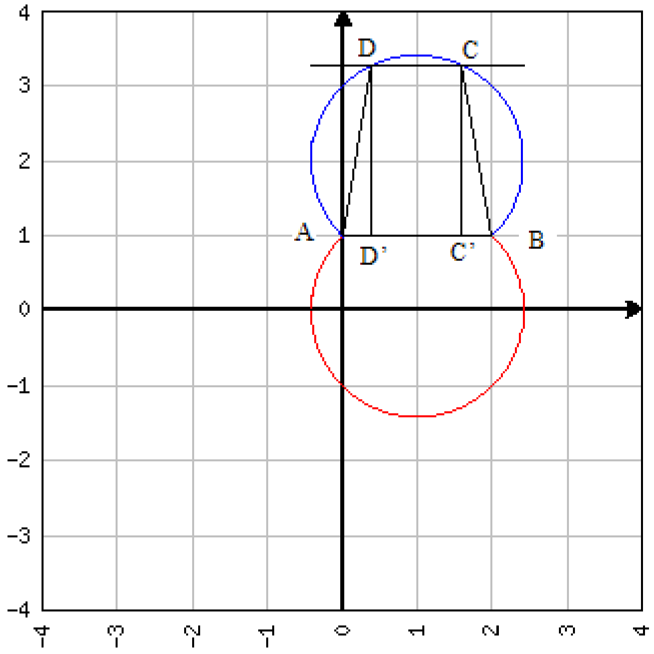
Punto 2a

Nel semipiano delle ordinate $y > 1$ si tracci la retta $y = k$, se ne indichino con C e D le eventuali intersezioni con γ e con C' e D' le loro proiezioni ortogonali su AB.

Si determinino i valori di k che rendono massime rispettivamente le seguenti grandezze:

il lato obliquo del trapezio isoscele ABDC;

Si consideri la figura sottostante:



I punti C e D sono distinti se $1 < k < 2+\sqrt{2}$ ed hanno coordinate $C=\left(1+\sqrt{4k-k^2-2},k\right), D=\left(1-\sqrt{4k-k^2-2},k\right)$. Il lato del trapezio isoscele misura $\overline{AD}=f(k)=\sqrt{\left(1-\sqrt{4k-k^2-2}\right)^2+(k-1)^2}=\sqrt{2k-2\sqrt{4k-k^2-2}}$. La massimizzazione della funzione $f(k)=\sqrt{2k-2\sqrt{4k-k^2-2}}$ in $\left(1,2+\sqrt{2}\right)$ è equivalente alla massimizzazione del radicando $R(k)=2k-2\sqrt{4k-k^2-2}$ e la effettuiamo mediante derivazione. La derivata prima è $R'(k)=2-\frac{4-2k}{\sqrt{4k-k^2-2}}=\frac{2\left(\sqrt{4k-k^2-2}+k-2\right)}{\sqrt{4k-k^2-2}}$. Imponiamo $R'(k)=\frac{2\left(\sqrt{4k-k^2-2}+k-2\right)}{\sqrt{4k-k^2-2}}>0 \Rightarrow \sqrt{4k-k^2-2}>2-k$. Tale disequazione è soddisfatta per $1 < k \leq 2+\sqrt{2}$, per cui il massimo del lato obliquo viene assunto quando $k=2+\sqrt{2}$ cioè quando i punti C e D coincidono.

Punto 2b

Si determinino i valori di k che rendono massime rispettivamente le seguenti grandezze:

la diagonale del rettangolo CDD'C';

La traccia non dice se il rettangolo deve essere tutto interno al luogo geometrico o meno, per cui si considereranno le due diverse situazioni. La situazione mostrata nella figura soprastante mostra un rettangolo interno al luogo e questo lo si ha per $3 \leq k < 2+\sqrt{2}$.

I punti C' e D' sono $C'=\left(1+\sqrt{4k-k^2-2},1\right), D'=\left(1-\sqrt{4k-k^2-2},1\right)$ per la diagonale misura $d(k)=\overline{CD'}=\sqrt{(k-1)^2+4\left(4k-k^2-2\right)}=\sqrt{-3k^2+14k-7}$. La massimizzazione di $d(k)=\sqrt{-3k^2+14k-7}$ in $\left(1,2+\sqrt{2}\right)$ è equivalente alla massimizzazione del radicando $R(k)=-3k^2+14k-7$. Il radicando $R(k)=-3k^2+14k-7$ è una parabola con concavità rivolta verso il basso che raggiunge il suo massimo nell'ascissa del vertice $k=\frac{7}{3}$. Questo valore non è accettabile in quanto non soddisfa la condizione $3 \leq k < 2+\sqrt{2}$ e in tal caso la diagonale è massima per $k=3$ e vale $d(3)=\sqrt{-3(3)^2+14(3)-7}=2\sqrt{2}$. Se, invece, consideriamo anche un eventuale rettangolo con due vertici sul luogo ed altri due sulla retta AB ma esterni ai punti A e B, cioè $1 < k \leq 3$, la soluzione $k = \frac{7}{3}$ è accettabile e la diagonale vale $d\left(\frac{7}{3}\right) = \sqrt{-3\left(\frac{7}{3}\right)^2 + 14\left(\frac{7}{3}\right) - 7} = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

Punto 2c

Si determinino i valori di k che rendono massime rispettivamente le seguenti grandezze:

il cilindro generato dalla rotazione di CDD'C' attorno all'asse del segmento AB.

Il cilindro derivante dalla rotazione di CDD'C' attorno all'asse del segmento AB ha area di base $A_B = \pi \cdot \overline{DD'}^2 = \pi \cdot (k-1)^2$ ed altezza $h = \overline{C'D'} = 2\sqrt{4k - k^2 - 2}$ per cui il volume è $V(k) = A_{Base} \cdot h = 2\pi(k-1)^2 \sqrt{4k - k^2 - 2}$. Bisogna massimizzare la funzione $g(k) = (k-1)^2 \sqrt{4k - k^2 - 2}$ il che è equivalente a massimizzare $f(k) = g^2(k) = (k-1)^4 \cdot (4k - k^2 - 2)$. La massimizzazione la effettueremo mediante derivazione. La derivata prima è $f'(k) = 2(3-k) \cdot (k-1)^3 (3k-2)$ e $f'(k) > 0 \Rightarrow k < \frac{2}{3} \vee 1 < k < 3$ e tenendo conto della limitazione $1 < k < 2 + \sqrt{2}$ si ha $f'(k) > 0 \Rightarrow 1 < k < 3$. Quindi il volume è massimo per $k = 3$ e vale $V(3) = 2\pi(3-1)^2 \sqrt{4(3) - (3)^2 - 2} = 8\pi$.

Anche il tal caso la traccia può lasciar spazio a fraintendimenti. Infatti si parla di rotazione intorno all'asse del segmento AB: si può interpretare anche come rotazione intorno all'asse del segmento

"di " AB. In tal caso il cilindro ha diametro di base $\overline{C'D'} = 2\sqrt{4k - k^2 - 2}$ ed altezza $\overline{DD'} = k - 1$ ed il volume vale $V(k) = A_{Base} \cdot h = \pi(4k - k^2 - 2) \cdot (k-1)$. La massimizzazione la effettuiamo sempre tramite derivate: $V'(k) = \pi[(4-2k)(k-1) + (4k - k^2 - 2)] = \pi(-3k^2 + 10k - 6)$ per cui la funzione volume è strettamente crescente per $1 < k < \frac{5+\sqrt{7}}{3}$ per cui il volume massimo lo si ha per $k = \frac{5+\sqrt{7}}{3}$ e vale $V\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3}\right) = \left[\pi(4k - k^2 - 2) \cdot (k-1)\right]_{k=\frac{5+\sqrt{7}}{3}} = \frac{2\pi}{27}(2+\sqrt{7})(5+\sqrt{7})$.

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y), si consideri la funzione:

$$y = \frac{x^3 + a}{(x+b)^2}$$

Punto 1

si determinino a e b in modo che il grafico della curva γ che ne risulta passi per il punto $P(2,0)$ e abbia per asintoto la retta $x = -1$;

La curva di equazione $y = \frac{x^3 + a}{(x+b)^2}$ passa per il punto $P(2,0)$ se $a = -8$; inoltre presenta la retta $x = -1$ come asintoto verticale se $b = 1$. La curva è allora $y = \frac{x^3 - 8}{(x+1)^2}$. Studiamo la funzione $y = \frac{x^3 - 8}{(x+1)^2}$

- *Dominio*: $R/\{-1\}$;
- *Intersezione asse delle ascisse*: $P(2,0)$;
- *Intersezioni asse delle ordinate*: $x = 0 \rightarrow y = -8$;
- *Eventuali simmetrie*: non è una funzione nè pari nè dispari;
- *Positività*: $y = \frac{x^3 - 8}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow x > 2$;
- *Asintoti verticali*: $\lim\limits_{x \to -1^{\pm}} \frac{x^3 - 8}{(x+1)^2} = -\infty$ per cui $x = -1$ è asintoto verticale;
- *Asintoti orizzontali*: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - 8}{(x+1)^2} = \pm\infty$ per cui non esistono asintoti orizzontali;
- *Asintoti obliqui*: L'asintoto obliquo ha equazione $y = mx + q$ con $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, q = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$. nel nostro caso si ha:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - 8}{x^3 + 2x^2 + x} = 1$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^3 - 8}{x^2 + 2x + 1} - x \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{-2x^2 - x - 8}{x^2 - 2x + 1} \right] = -2$$

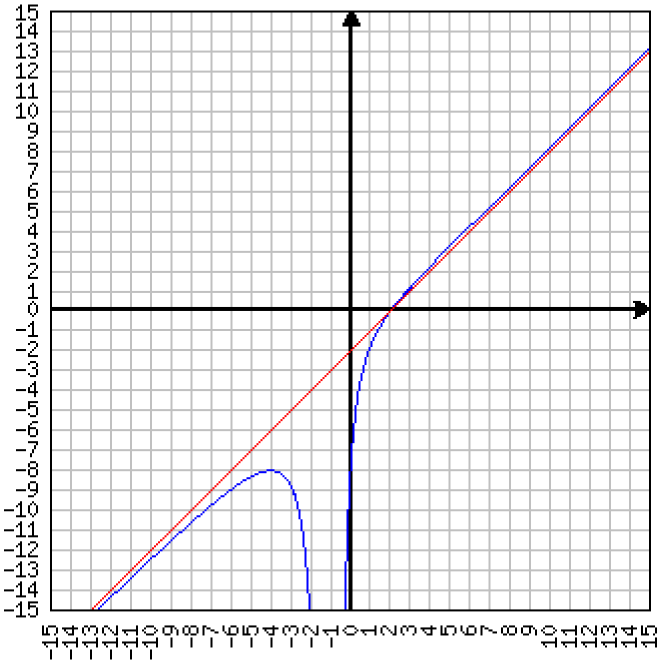
per cui l'asintoto t ha equazione $t: y = x - 2$

Crescenza e *decrescenza*: la derivata prima è

$$y' = \frac{3x^2(x+1)^2 - 2(x^3-8)(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x^3+3x^2+16)}{(x+1)^3} = \frac{(x+4)(x^2-x+4)}{(x+1)^3}.$$

Quindi $y' = \frac{(x+4)(x^2-x+4)}{(x+1)^3} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty,-4) \cup (-1,+\infty)$. In conclusione la funzione $y = \frac{x^3-8}{(x-1)^2}$ è strettamente crescente in $(-\infty,-4) \cup (-1,+\infty)$ e strettamente decrescente altrove.

- *Concavità e convessità*: la derivata seconda è $y''(x) = \frac{6(x-8)}{(x+1)^4} > 0 \Rightarrow x > 8$ per cui in $(8,+\infty)$ la funzione ha concavità verso l'alto; inoltre $y'' = 0 \Rightarrow x = 8$ per cui $\left(8, \frac{56}{9}\right)$ è un flesso a tangente obliqua. Inoltre $y''(-4) < 0 \Rightarrow (-4,-8)$ è un massimo relativo. Il grafico è sotto presentato:



Punto 2

si scriva l'equazione dell'asintoto obliquo t;

L'asintoto obliquo, trovato nel punto precedente, ha equazione $t: y = x - 2$

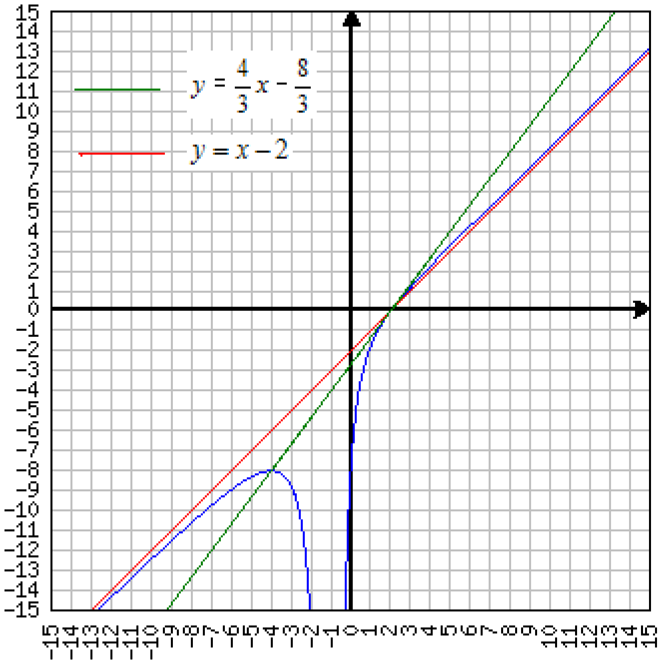
Punto 3

si determini l'angolo α che t forma con la tangente a γ nel punto di intersezione tra γ e t

L'intersezione tra la curva $y = \frac{x^3 - 8}{(x+1)^2}$ e l'asintoto $t : y = x - 2$ è data dal sistema

$$C : \begin{cases} y = \frac{x^3 - 8}{(x+1)^2} \\ y = x - 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^3 - 8}{(x+1)^2} = x - 2 \Rightarrow \frac{3(x-2)}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow C(2,0)$$

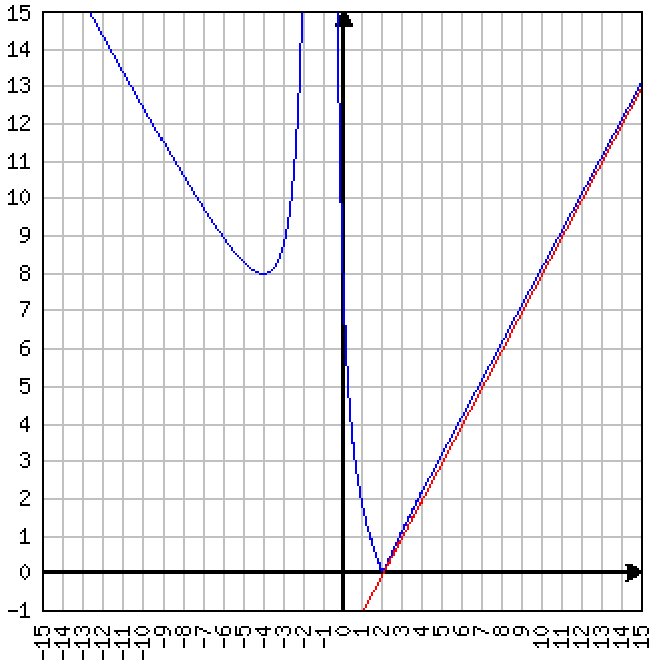
La tangente a $C(2,0)$ ha equazione $y = m(x-2)$ con $m = y'(2) = \left[\frac{(x^3 + 3x^2 + 16)}{(x+1)^3}\right]_{x=2} = \frac{4}{3}$ e cioè $y = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$. La tangente dell'angolo tra l'asintoto è la retta tangente è $\tan\alpha = \left|\frac{\frac{4}{3} - 1}{1 + \frac{4}{3}}\right| = \frac{1}{7}$ da cui $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{7}\right) \cong 8°7'48''$.



Punto 4

si tracci il grafico di: $y = \frac{|x^3 + a|}{(x+b)^2}$

Poiché $y=\frac{\left|x^3+a\right|}{(x+b)^2}=\left|\frac{x^3+a}{(x+b)^2}\right|$ in quanto $(x+b)^2$ è non negativo, il grafico di $y=\frac{\left|x^3+a\right|}{(x+b)^2}=\left|\frac{x^3+a}{(x+b)^2}\right|$ si ricava da quello di $y=\frac{x^3+a}{(x+b)^2}$ ribaltando verso le ordinate positive le porzioni di grafico al di sotto dell'asse delle ascisse. Il grafico è di seguito presentato.



QUESTIONARIO

Quesito 1

Il rapporto delle aree laterali di due coni aventi basi uguali è uguale al rapporto degli apotemi mentre il rapporto dei loro volumi è uguale al rapporto delle altezze.

Dato un cono con raggio di base *r*, altezza *h* ed apotema *a*, la superficie laterale ed il volume sono rispettivamente $S_l = \pi \cdot r \cdot a, V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$. Se due coni, di apotemi a e a_1 ed altezze h e h_1, hanno la stessa base e cioè lo stesso raggio di base il rapporto delle superficie laterali diventa $R = \frac{\pi \cdot r \cdot a}{\pi \cdot r \cdot a_1} = \frac{a}{a_1}$ mentre il rapporto tra i volumi sarà $R = \frac{\frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}}{\frac{\pi \cdot r^2 \cdot h_1}{3}} = \frac{h}{h_1}$.

Quesito 2

Verificare, ricorrendo direttamente alla definizione, che:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Per la definizione di limite, quando il limite tende a +∞ mentre *x* tende a un valore finito si ha:

$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty \text{ se } \forall k\ (>0)\ \exists\ I_c \mid \forall x \in I_c \cap D_f \setminus \{c\} \text{ si ha } f(x) > k$$

Dovremo dunque risolvere la disequazione $f(x) > k$: se le soluzioni del sistema costituiscono un intorno di *c*, allora è vero che $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$, altrimenti no.

La disequazione $f(x) > k$ è $\frac{1}{x^2} > k \overset{k>0}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{\sqrt{k}} < x < \frac{1}{\sqrt{k}}$ che costituisce un intorno di zero. Al crescere di *k* tanto più l'intorno si avvicina a zero.

Quesito 3

Enunciare il teorema del *valor medio o di Lagrange* e utilizzarlo per dimostrare che:

$$|\sin b - \sin a| \le |b - a|$$

Il teorema di Lagrange (o del valor medio) afferma che se una funzione reale di variabile reale è continua in un intervallo [a; b] e derivabile in (a; b), esiste almeno un punto interno all'intervallo in cui la tangente al grafico della funzione è parallela alla retta che congiunge i punti del grafico corrispondenti agli estremi dell'intervallo [a;b]. Questa è l'interpretazione geometrica del teorema di Lagrange.

In modo più formale:

- Sia $f:[a,b]\to R$
- continua in [a, b]
- derivabile in (a, b)

allora in queste ipotesi $\exists c\in(a,b):\ f^{'}(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Dopo aver enunciato il teorema di Lagrange ed averlo interpretato geometricamente, applichiamolo alla funzione $f(x)=\sin x$ in (a, b). Si ha $\cos(c)=\dfrac{\sin b-\sin a}{b-a}$. Ma $|\cos(c)|\le 1$ per cui $\left|\dfrac{\sin b-\sin a}{b-a}\right|\le 1 \Leftrightarrow |\sin b-\sin a|\le|b-a|$ come volevasi dimostrare.

Quesito 4

Di una funzione *f(x)* si sa che: *f(0) = (1/log2)^2, f'(0)=0* e che ha derivata seconda uguale a *2^x*. Si può dire quanto vale *f(x)*?

Si tratta di risolvere il problema di Cauchy seguente:

$$\begin{cases} f''(x)=2^x \\ f'(0)=0 \\ f(0)=\dfrac{1}{\log^2 2} \end{cases}$$

Integrando ambo i membri dell'uguaglianza $f''(x)=2^x$ si ha $f'(x)=\dfrac{2^x}{\log 2}+k$ e reintegrando ambo i membri si ricava $f(x)=\dfrac{2^x}{\log^2 2}+kx+h$. La condizione $f(0)=\dfrac{1}{\log^2 2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\log^2 2}=\dfrac{1}{\log^2 2}+h\Leftrightarrow h=0$ mentre la condizione $f'(0)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{\log 2}+k=0\Leftrightarrow k=-\dfrac{1}{\log 2}$ per cui la funzione diventa $f(x)=\dfrac{2^x}{\log^2 2}-\dfrac{x}{\log 2}$.

Quesito 5

Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x) = 2\arcsin x - \arccos\left(1 - 2x^2\right)$$

Quali conclusioni se ne possono trarre per la $f(x)$?

Il dominio della funzione $f(x) = 2\arcsin x - \arccos\left(1 - 2x^2\right)$ è $D: \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -1 \le 1 - 2x^2 \le 1 \end{cases} \to \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le x^2 \le 1 \end{cases} \to \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -1 \le x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$.

La derivata è

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4x}{\sqrt{1-\left(1-2x^2\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4x}{\sqrt{4x^2\left(1-x^2\right)}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x}{|x|\sqrt{\left(1-x^2\right)}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\left(1 - \frac{x}{|x|}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{4}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se} \quad -1 \le x < 0 \end{cases}$$

Dall'espressione della deriviamo notiamo che la funzione $f(x) = 2\arcsin x - \arccos\left(1 - 2x^2\right)$ è costante nell'intervallo [0,1] ed il valore della costante si ricava valutando la funzione stessa in un punto dell'intervallo $[0,1]$: per $x = \frac{1}{2}$ la funzione vale $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0$. Quindi la funzione è nulla in $[0,1]$. In $[-1,0]$ la funzione ha derivata $f'(x) = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$ e integrando ambo i membri si ha $f(x) = 4\arcsin x + k$ e sapendo che $f(0) = 0$ si ricava $f(x) = 4\arcsin x$ in $[-1,0]$. In conclusione

$f(x) = 2\arcsin x - \arccos\left(1 - 2x^2\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 4\arcsin x & \text{se } -1 \le x \le 0 \end{cases}$ e si tratta di una funzione continua in tutto il dominio [-1,1] e derivabile in $\left[-1,0\right[\cup \left]0,1\right]$ in quanto $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 4 \ne 0 = \lim_{x \to 0^+} f'(x)$.

Quesito 6

Dimostrare che:

$$\int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}$$

Calcoliamo l'integrale:

$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)dx = \left[\frac{x}{2}-\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$ come volevasi dimostrare.

Quesito 7

Calcolare, con uno dei metodi numerici studiati, un valore approssimato della radice dell'equazione: $x-\log(2-x)=0$

La funzione $f(x)=x-\log(2-x)$ ha come dominio $(-\infty,2)$. La derivata prima è $f'(x)=1+\frac{1}{2-x}=\frac{3-x}{2-x}$ per cui $f(x)=x-\log(2-x)$ è strettamente crescente in tutto il dominio. Inoltre $f(0)=-\log 2<0, f(1)=1>0$ per cui per il primo teorema degli zeri la funzione $f(x)=x-\log(2-x)$ presenta un unico zero in $(0,1)$. Applichiamo il metodo di Newton o delle tangenti con punto iniziale $x_0=1$ in quanto in $x_0=1$ sia la funzione che la sua derivata seconda assumono valori concordi. La radice sarà calcolata con la formula ricorsiva $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Sviluppando il metodo a partire da $x_0=1$ si ha:

$$x_0=1$$
$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=1-\frac{f(1)}{f'(1)}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$
$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=\frac{1}{2}-\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{2}-\log\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{5}{3}}\cong 0.4433$$
$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=0.4433-\frac{f(0.4433)}{f'(0.4433)}\cong 0.4428$$
$$x_4=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}=0.4428-\frac{f(0.4428)}{f'(0.4428)}\cong 0.4428$$

Poiché $x_4 \approx x_3$ con quattro cifre decimali esatte possiamo dire che la soluzione cercata è $\overline{x}\cong 0.4428$.

Quesito 8

Tenuto conto che è:

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

calcolare π con 3 cifre decimali esatte utilizzando una formula d'integrazione approssimata.

Si ha $\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Applichiamo il metodo di Cavalieri Simpson. L'errore che si commette utilizzando il metodo suddetto è $e \le \frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot M$ dove $M = \max\left|g^{IV}(x)\right|$ in [0,1]. Nel caso in esame $a = 0, b = 1, g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. La derivata quarta di $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ è $g^{IV}(x) = \frac{24(5x^4 - 10x^2 + 1)}{(1+x^2)^5}$ e la derivate quarta in [0,1] è massima per $x = 0$ e $M = \max\left|g^{IV}(x)\right| = 24$. Quindi l'errore commesso è $e \le \frac{2}{15n^4}$ e poiché si vuole un risultato con 3 cifre decimali esatte si deve scegliere n in modo che $e \le \frac{2}{15n^4} < \frac{1}{10000} \Rightarrow n^4 > \frac{20000}{15} = \frac{4000}{3} \Rightarrow n > \sqrt[4]{\frac{4000}{3}} \cong 6.04$ per cui scegliamo $n = 8$ in quanto il metodo di Cavalieri Simpson va usato per divisioni pari.

Applichiamo la formula di Cavalieri-Simpson:

$$
\begin{aligned}
&\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \cong \\
&\cong 4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) \cdot \left\{\left[\frac{g(x_0) + g(x_8)}{3}\right] + \frac{4}{3} \cdot [g(x_1) + g(x_3) + g(x_5) + g(x_7)] + \frac{2}{3} \cdot [g(x_2) + g(x_4) + g(x_6)]\right\} = \\
&= \frac{4}{8} \cdot \left\{\left[\frac{g(0) + g(1)}{3}\right] + \frac{4}{3} \cdot \left[g\left(\frac{1}{8}\right) + g\left(\frac{3}{8}\right) + g\left(\frac{5}{8}\right) + g\left(\frac{7}{8}\right)\right] + \frac{2}{3} \cdot \left[g\left(\frac{2}{8}\right) + g\left(\frac{4}{8}\right) + g\left(\frac{6}{8}\right)\right]\right\} = \\
&= \frac{4}{8} \cdot \left[\frac{1 + \frac{1}{2}}{3} + \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{64}{65} + \frac{64}{73} + \frac{64}{89} + \frac{64}{113}\right) + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{64}{68} + \frac{64}{80} + \frac{64}{100}\right)\right] \cong 3.14159
\end{aligned}
$$

Il valore reale di π per le prime cinque cifre decimali coincide con quello trovato.

Quesito 9

Tra 15 videogiochi di cui 5 difettosi se ne scelgono 3 a caso. Determinare la probabilità che

a) nessuno dei tre sia difettoso;

b) almeno uno dei tre non sia difettoso

La probabilità che un videogioco sia difettoso è $p = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

a) La probabilità di non estrarre nessun videogioco difettoso, se ne prendiamo 3 a caso, è
$P\{\text{nessuno dei tre difettoso}\} = \binom{3}{0} p^0 (1-p)^3 = (1-p)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.

b) La probabilità di estrarre almeno un videogioco non difettoso è
$P\{\text{almeno un videogioco non difettoso}\} = 1 - P\{\text{tutti e tre difettosi}\} =$
$= 1 - \binom{3}{3} p^3 (1-p)^0 = 1 - p^3 = 1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$

Quesito 10

Un solido viene trasformato mediante una similitudine di rapporto 3. Dire come variano il suo volume e l'area della sua superficie.

Il volume varia come $k^3 = 27$ mentre l'area di superficie come $k^2 = 9$.