

SESSIONE STRAORDINARIA 2002

PROBLEMA 1.

Con riferimento ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy):

scrivere l'equazione della circonferenza k con centro nel punto $(8, 2)$ e raggio 6 e calcolare le coordinate dei punti M ed N in cui la bisettrice b del 1° e 3° quadrante interseca la curva;

scrivere l'equazione della parabola p avente l'asse parallelo all'asse delle ordinate, tangente all'asse delle ascisse in un punto del semipiano $x > 0$ e passante per i punti M ed N ;

calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla parabola p e dalla bisettrice b ;

dopo aver stabilito che la circonferenza k e la parabola p non hanno altri punti in comune oltre ad M ed N , calcolare le aree delle regioni in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla parabola.

SOLUZIONE DI DE ROSA NICOLA

La circonferenza richiesta, dati il centro ed il raggio ha equazione:

$$\begin{aligned}(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 &= R^2 \Leftrightarrow \\ (x - 8)^2 + (y - 2)^2 &= 36 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 16x - 4y + 32 = 0\end{aligned}$$

Tale circonferenza incontra l'asse delle ascisse nei punti per cui $x^2 - 16x + 32 = 0 \rightarrow x = 8 \pm 4\sqrt{2}$, mentre non incontra mai l'asse delle ordinate visto che $y^2 - 4y + 32 = 0 \rightarrow y = 2 \pm 2i\sqrt{7}$.

Le intersezioni con la bisettrice del primo e terzo quadrante di equazione $y = x$ si ricavano risolvendo il sistema seguente:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 16x - 4y + 32 = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 20x + 32 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow x = 5 \pm 3$$

Per cui i punti di intersezione sono $M = (2, 2), N = (8, 8)$

Ora l'equazione generica della parabola p con asse parallelo all'asse delle ordinate è:

$$p: y = ax^2 + bx + c$$

Tale parabola passa per i punti $M = (2, 2), N = (8, 8)$, e la terza condizione è che sia tangente all'asse delle ascisse in un punto con ascissa positiva. Ora poiché la parabola ha asse parallelo all'asse delle ordinate, allora essa può essere tangente all'asse delle ascisse solo nel suo vertice, per cui questo significa che l'ordinata del vertice deve essere nulla e l'ascissa deve essere positiva, visto che si richiede la tangenza in un punto ad ascissa positiva.

Il vertice di una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ è $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ per cui la

condizione di tangenza impone $b^2 - 4ac = 0$, $-\frac{b}{2a} > 0$.

Imponendo anche il passaggio per $M = (2, 2), N = (8, 8)$ si ricava il seguente sistema da risolvere:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 2 \\ 64a + 8b + c = 8 \\ b^2 - 4ac = 0 \\ -\frac{b}{2a} > 0 \end{cases}$$

Sottraendo la prima e la seconda l'una dall'altra si ricava: $10a + b = 1 \rightarrow b = 1 - 10a$ da cui
 $c = 2 - 2b - 4a = 2 - 2 + 20a - 4a = 16a$

Ora sostituendo nella terza equazione si ha:

$$(1 - 10a)^2 - 4a(16a) = 0 \rightarrow 36a^2 - 20a + 1 = 0 \rightarrow a = \frac{10 \pm 8}{36} \rightarrow a = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{18}$$

Da cui

$$a = \frac{1}{2} \rightarrow b = -4$$

$$a = \frac{1}{18} \rightarrow b = \frac{1}{9}$$

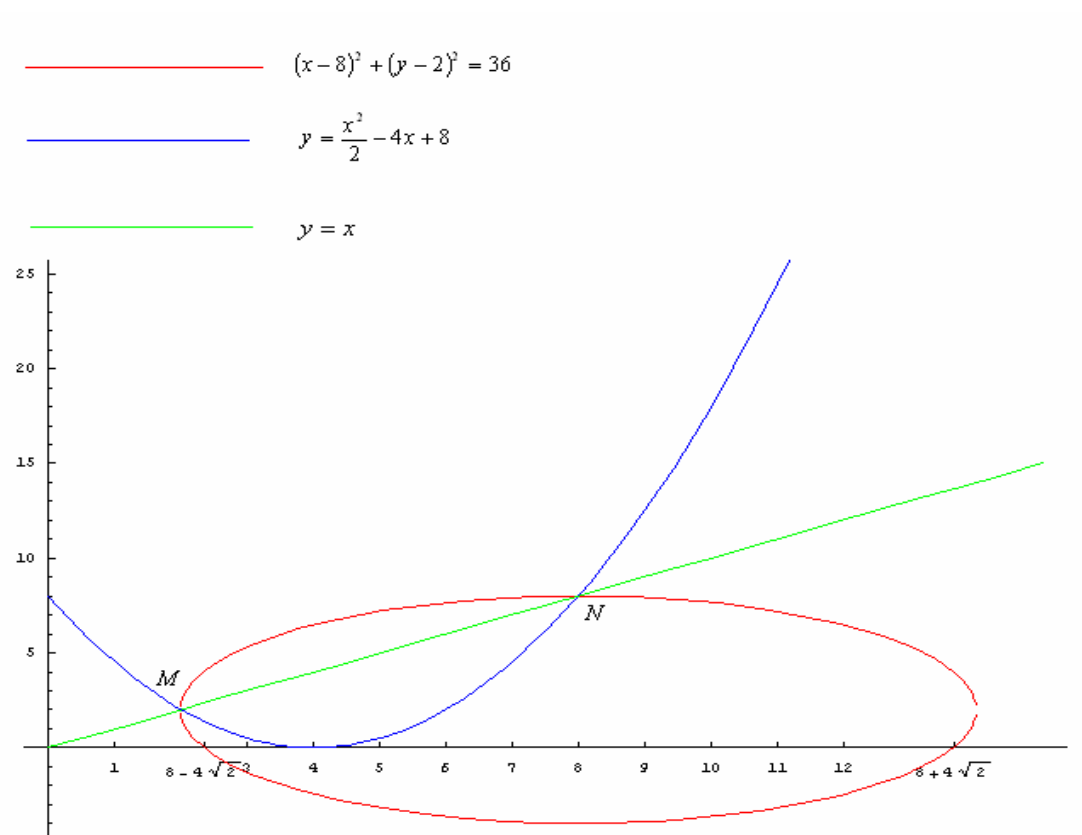
Poiché deve aversi $-\frac{b}{2a} > 0$ allora la soluzione accettabile è:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -4 \\ c = 8 \end{cases}$$

Cioè la parabola ha equazione

$$p: y = \frac{x^2}{2} - 4x + 8$$

Il tutto viene presentato nel grafico sottostante:



L'area delimitata dalla parabola e la bisettrice è:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_2^8 \left[x - \left(\frac{x^2}{2} - 4x + 8 \right) \right] dx = \int_2^8 \left[-\frac{x^2}{2} + 5x - 8 \right] dx \\
 &= \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{5x^2}{2} - 8x \right]_2^8 = -\frac{256}{3} + 160 - 64 + \frac{4}{3} - 10 + 16 = 102 - \frac{252}{3} = 18
 \end{aligned}$$

Calcoliamo ora i punti di intersezione tra la circonferenza e la parabola:

$$\begin{cases} (x-8)^2 + (y-2)^2 = 36 \\ y = \frac{x^2}{2} - 4x + 8 \end{cases} \Rightarrow (x-8)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 4x + 8 - 2 \right)^2 = 36 \Rightarrow (x-8)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 4x + 6 \right)^2 = 36 \Rightarrow$$

$$x^4 - 16x^3 + 92x^2 - 256x + 256 = 0 \rightarrow (x-2)(x-8)(x^2 - 6x + 16) = 0 \rightarrow x = 2, x = 8, x = 3 \pm i\sqrt{7}$$

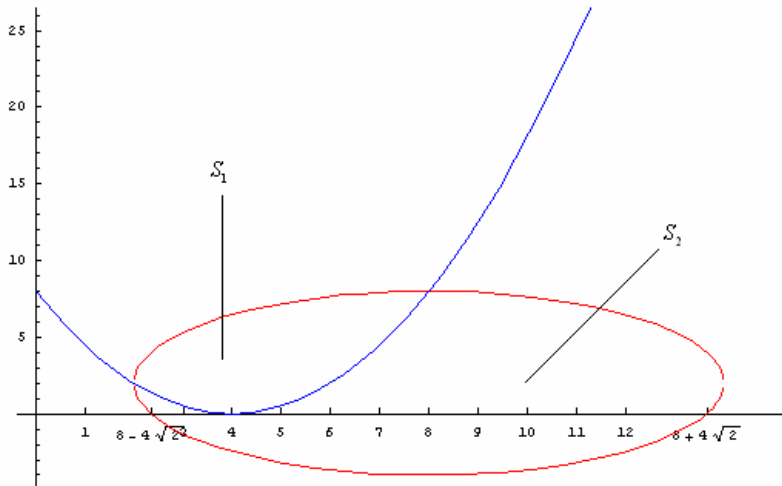
Quindi come anticipato nella traccia gli unici punti in comune sono i punti $M = (2,2)$, $N = (8,8)$.

A completamento del problema vanno calcolate le aree in cui la parabola divide la circonferenza.

Consideriamo la figura sottostante:

$$(x-8)^2 + (y-2)^2 = 36$$

$$y = \frac{x^2}{2} - 4x + 8$$



Per il calcolo delle aree dobbiamo innanzitutto esplicitare l'equazione della circonferenza:

$$(x-8)^2 + (y-2)^2 = 36 \rightarrow y = 2 \pm \sqrt{36 - (x-8)^2}$$

Ora per il calcolo di S_1 visto che la circonferenza si trova al di sopra della retta $y = 2$, l'arco di circonferenza è descritto dall'equazione $y = 2 + \sqrt{36 - (x-8)^2}$, per cui

$$S_1 = \int_2^8 \left[2 + \sqrt{36 - (x-8)^2} - \left(\frac{x^2}{2} - 4x + 8 \right) \right] dx = \int_2^8 \left[\sqrt{36 - (x-8)^2} \right] dx + \int_2^8 \left[-\frac{x^2}{2} + 4x - 6 \right] dx = S_{1,1} + S_{1,2}$$

$$S_{1,1} = \int_2^8 \left[\sqrt{36 - (x-8)^2} \right] dx$$

$$S_{1,2} = \int_2^8 \left[-\frac{x^2}{2} + 4x - 6 \right] dx$$

Ora

$$S_{1,2} = \int_2^8 \left[-\frac{x^2}{2} + 4x - 6 \right] dx = \left[-\frac{x^3}{6} + 2x^2 - 6x \right]_2^8 = -\frac{256}{3} + 128 - 48 + \frac{4}{3} - 8 + 12 = 84 - \frac{252}{3} = 0$$

Per il calcolo di $S_{1,1} = \int_2^8 \left[\sqrt{36 - (x-8)^2} \right] dx$ seguiamo la strada seguente:

Effettuiamo la sostituzione

$$x - 8 = -6 \sin(t)$$

Con questa sostituzione si ha:

$$dx = -6 \cos(t) dt$$

$$x = 2 \rightarrow \sin(t) = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$x = 8 \rightarrow \sin(t) = 0 \rightarrow t = 0$$

Per cui

$$S_{1,1} = \int_2^8 \left[\sqrt{36 - (x-8)^2} \right] dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 6 \sqrt{1 - \sin^2(t)} (-6 \cos(t)) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 36 \sqrt{1 - \sin^2(t)} (\cos(t)) dt$$

Ora va ricordato che nel primo quadrante della circonferenza trigonometrica, il coseno è positivo per cui $\sqrt{1 - \sin^2(t)} = |\cos(t)| = \cos(t)$ da cui

$$S_{1,1} = \int_2^8 \left[\sqrt{36 - (x-8)^2} \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 36 \sqrt{1 - \sin^2(t)} (\cos(t)) dt = 36 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = 36 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1 + \cos(2t)}{2} \right] dt =$$

$$36 \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 36 \left(\frac{\pi}{4} \right) = 9\pi$$

Quindi

$$S_1 = S_{1,1} + S_{1,2} = S_{1,1} = 9\pi$$

L'altra area risulta allora:

$$S_2 = \pi R^2 - S_1 = 36\pi - 9\pi = 27\pi$$