ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2002
Sessione straordinaria

PROBLEMA 1

Considerato il seguente sistema lineare nelle incognite *x*, *y*, *z*:

$$\begin{cases} x+ay+a^2z=1 \\ x+ay+abz=a \\ bx+a^2y+a^2bz=a^2b \end{cases} \qquad [1]$$

a) stabilire sotto quali condizioni per i parametri reali *a*, *b* esso è:

determinato;

indeterminato;

impossibile.

b) Posto che la terna (*x*; *y; z*) sia una soluzione del sistema [1], studiare la curva di equazione:

$$y-\frac{b}{a(a-b)}=\frac{x}{a}+z$$

e disegnarne l'andamento in un riferimento cartesiano ortogonale (*Oab*).

PROBLEMA 2

Con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (O*xy*):

a) studiare le funzioni:

$$y=\frac{-2x^3+6x^2}{3},\ y=\frac{x^3-6x^2+12x}{3}$$

e disegnare i loro grafici;

b) dopo aver verificato che, oltre al punto O, tali grafici hanno in comune un altro punto A, determinare sul segmento OA un punto P tale che, condotta per esso la retta parallela all'asse *y*, sia massima la lunghezza del segmento RS, dove R ed S sono i punti in cui la retta interseca i due grafici suddetti;

c) determinare le coordinate dei punti di ascisse uguali in cui le due curve hanno tangenti parallele e verificare che, oltre al punto A, si ritrovano i punti R ed S;

d) calcolare il volume del solido generato dalla regione finita di piano delimitata dalle due curve quando ruota di un giro completo intorno all'asse *x*.

QUESTIONARIO

1. In un piano è assegnata una parabola p. Tracciata la tangente t ad essa nel suo vertice, chiamati M ed N due punti di p simmetrici rispetto al suo asse e indicate con M' ed N' rispettivamente le proiezioni ortogonali di M ed N sulla retta t, determinare il rapporto fra l'area della regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta MN e quella del rettangolo MNN'M', fornendo una esauriente dimostrazione.

2. Si consideri un cono circolare retto ottenuto dalla rotazione di un triangolo isoscele intorno all'altezza propriamente detta. Sapendo che il perimetro del triangolo è costante, stabilire quale rapporto deve sussistere fra il lato del triangolo e la sua base affinché il cono abbia volume massimo.

3. In un riferimento monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) è assegnata l'iperbole di equazione $y=\frac{1}{x}$. Considerati su di essa i punti A e B di ascisse rispettivamente a ed $\frac{1}{a}$, con $a\neq 0$, si traccino le tangenti all'iperbole in A e B. Calcolare l'area della regione piana delimitata dall'iperbole e dalle tangenti considerate.

4. Dopo aver definito il limite destro e il limite sinistro di una funzione in un punto, ricorrere a tali definizioni per verificare che risulta:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(x+\frac{x}{|x|}\right)=-1,\ \lim_{x\to 0^+}\left(x+\frac{x}{|x|}\right)=1.$$

5. Considerata la funzione $f(x)=2+\sqrt[3]{x-2}$, stabilire se è continua e derivabile nel punto x=2 e fornire un'interpretazione geometrica delle conclusioni.

6. Dimostrare la formula che esprime il numero delle combinazioni semplici di n oggetti presi a k a k in funzione del numero delle disposizioni semplici degli stessi oggetti presi a k a k e delle permutazioni semplici su k oggetti.

7. Un'urna contiene 100 palline numerate da 1 a 100. Determinare la probabilità che estraendo a caso una pallina, essa sia contrassegnata da un numero:

divisibile per 10 o per 8,

divisibile per 10 e per 8,

non divisibile per 10 né per 8.

8. Con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), determinare le coordinate del baricentro del triangolo in cui l'omotetia di centro (1, 2) e caratteristica 1/4 trasforma il triangolo di vertici (4, 0), (-4, 4), (0, 8).

9. Tra le affinità di equazioni:

$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = cx + dy \end{cases}$$

assegnate in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), determinare quella che trasforma i punti di coordinate $\left(3, \sqrt{2}\right)$ e $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ ordinatamente nei punti di coordinate $\left(\frac{1}{3}, \frac{7\sqrt{2}}{3}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$.

10. Scrivere un algoritmo che risolva il problema di determinare una radice approssimata di un'equazione con un'approssimazione voluta.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

Considerato il seguente sistema lineare nelle incognite *x*, *y*, *z*:

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = 1 \\ x + ay + abz = a \\ bx + a^2 y + a^2 bz = a^2 b \end{cases} \quad [1]$$

Punto 1

stabilire sotto quali condizioni per i parametri reali *a*, *b* esso è:

determinato;

indeterminato;

impossibile.

Il determinante della matrice dei coefficienti è:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & ab \\ b & a^2 & a^2 b \end{vmatrix} = \left(a^3 b + a^2 b^2 + a^4\right) - \left(a^3 b + a^3 b + a^3 b\right) = \left(a^4 - 2a^3 b + a^2 b^2\right) = a^2 (a-b)^2$$

Per il teorema di Cramer se $a \neq 0 \wedge a \neq b$ il sistema [1] è determinato.

Se $a = 0$ il sistema è impossibile in quanto la prima e la seconda equazione del sistema [1] fornirà rispettivamente $x = 1$ e $x = 0$.

Se $a = b$ il sistema [1] diventa:

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = 1 \\ x + ay + a^2 z = a \\ ax + a^2 y + a^3 z = a^3 \end{cases} \quad [2]$$

che risulta essere impossibile se $a \neq 1$ in quanto altrimenti le prime due equazioni del sistema [2] sarebbero in contrasto.

Se $a = b = 1$ il sistema [1] diventa:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad [3]$$

e il sistema [3] è indeterminato.

In conclusione il sistema [1] è:

- Determinato se $a \neq 0 \wedge a \neq b$
- Impossibile se $a = 0 \vee a = b \neq 1$
- Indeterminato se $a = b = 1$

Punto 2

Posto che la terna (*x*; *y; z*) sia una soluzione del sistema [1], studiare la curva di equazione:

$$y-\frac{b}{a(a-b)}=\frac{x}{a}+z$$

Per il teorema di Cramer le tre soluzioni sono:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ a & a & ab\\ a^2b & a^2 & a^2b\end{vmatrix}}{a^2(a-b)^2}=\frac{\left(a^3b+a^4b^2+a^5\right)-\left(a^5b+a^3b+a^4b\right)}{a^2(a-b)^2}=\frac{a^4(1-b)(a-b)}{a^2(a-b)^2}=\frac{a^2(1-b)}{(a-b)}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & a^2\\ 1 & a & ab\\ b & a^2b & a^2b\end{vmatrix}}{a^2(a-b)^2}=\frac{\left(a^3b+ab^2+a^4b\right)-\left(a^3b+a^3b^2+a^2b\right)}{a^2(a-b)^2}=\frac{ab\left(a^2-1\right)(a-b)}{a^2(a-b)^2}=\frac{b\left(a^2-1\right)}{a(a-b)}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 1 & a & a\\ b & a^2 & a^2b\end{vmatrix}}{a^2(a-b)^2}=\frac{\left(a^3b+a^2b+a^2\right)-\left(ab+a^3b+a^3\right)}{a^2(a-b)^2}=\frac{a(1-a)(a-b)}{a^2(a-b)^2}=\frac{1-a}{a(a-b)}$$

La curva $y-\frac{b}{a(a-b)}=\frac{x}{a}+z$ diventa

$$\frac{b\left(a^2-1\right)}{a(a-b)}-\frac{b}{a(a-b)}=\frac{a^2(1-b)}{a(a-b)}+\frac{1-a}{a(a-b)}\Rightarrow b\left(a^2-1\right)-b=a^2(1-b)+1-a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b\left(a^2-1\right)-b+a^2b=a^2-a+1\Rightarrow b=\frac{a^2-a+1}{2\left(a^2-1\right)}$$

Bisogna allora disegnare la curva $b=\frac{a^2-a+1}{2\left(a^2-1\right)}$ da cui vanno esclusi i punti $a=0\wedge a=b$, cioè il punto $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ e i punti intersezione della curva con la bisettrice del primo e terzo quadrante $b=a$.

Studiamo allora la curva $b=\frac{a^2-a+1}{2\left(a^2-1\right)}$.

Dominio : $R/\{\pm 1\}$

Intersezione asse ascisse: non ve ne sono

Intersezione asse ordinate: $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$

Positività:

$b = \dfrac{a^2 - a + 1}{2(a^2 - 1)} > 0 \Rightarrow (a^2 - 1) > 0 \Rightarrow a < -1 \vee a > 1$

Asintoti verticali: $\lim_{a \to 1^{\pm}} \dfrac{a^2 - a + 1}{2(a^2 - 1)} = \pm\infty, \lim_{a \to -1^{\pm}} \dfrac{a^2 - a + 1}{2(a^2 - 1)} = \mp\infty$ per cui $a = \pm 1$ sono due asintoti verticali

Asintoti orizzontali: $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{a^2 - a + 1}{2(a^2 - 1)} = \dfrac{1}{2}$ per cui la retta $b = \dfrac{1}{2}$ è asintoto orizzontale

Asintoti obliqui: non ve ne sono data la presenza degli asintoti orizzontali

Crescenza e decrescenza:

Le derivate prima e seconda sono $b'(a) = \dfrac{a^2 - 4a + 1}{2(a^2 - 1)^2}, b''(a) = \dfrac{a^3 - 6a^2 + 3a - 2}{(a^2 - 1)^3}$ per cui

$$b'(a) = \frac{a^2 - 4a + 1}{2(a^2 - 1)^2} > 0 \Rightarrow a < 2 - \sqrt{3} \vee a > 2 + \sqrt{3}$$

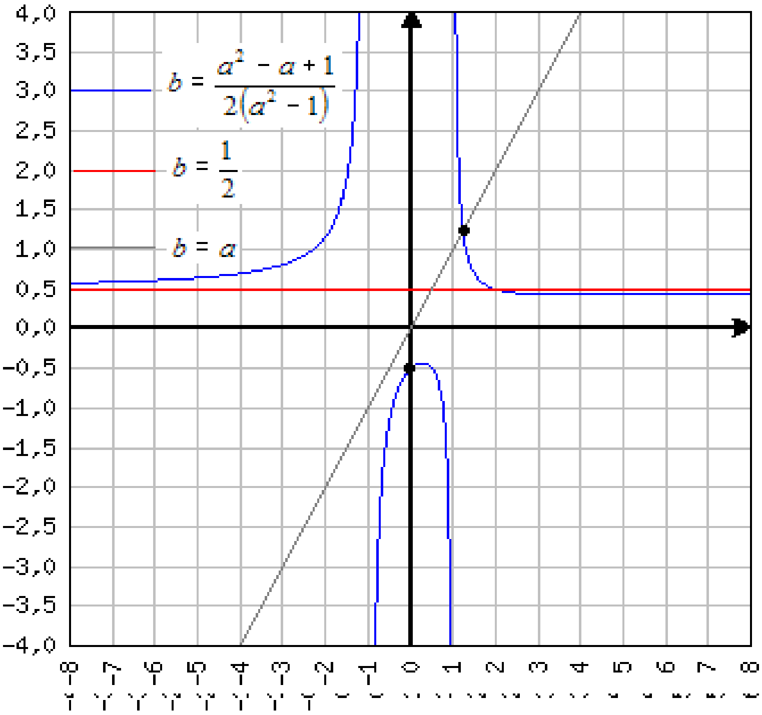
$$b'(a) = \frac{a^2 - 4a + 1}{2(a^2 - 1)^2} > 0 \Rightarrow 2 - \sqrt{3} < a < 2 + \sqrt{3}$$

$$b'(a) = \frac{a^2 - 4a + 1}{2(a^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow a = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$b''\left(2 - \sqrt{3}\right) < 0, b''\left(2 + \sqrt{3}\right) > 0$$

In base alle considerazioni sopra effettuate deduciamo che $a = 2 - \sqrt{3}$ è ascissa di massimo relativo e $a = 2 + \sqrt{3}$ è ascissa di minimo relativo.

Il grafico è di seguito presentato:



PROBLEMA 2

Con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (O*xy*):

Punto 1

studiare le funzioni:

$$y=\frac{-2x^3+6x^2}{3}\text{ , } y=\frac{x^3-6x^2+12x}{3}$$

e disegnare i loro grafici;

Iniziamo a studiare la funzione $y=\frac{-2x^3+6x^2}{3}=\frac{2x^2(3-x)}{3}$

Dominio : R

Intersezione asse ascisse: $y=\frac{-2x^3+6x^2}{3}=\frac{2x^2(3-x)}{3}=0\rightarrow x=0, x=3$

Intersezione asse ordinate: $x=0\rightarrow y=0$

Positività:

$y=\frac{2x^2(3-x)}{3}>0\Leftrightarrow x\neq 0\cup(3-x)>0\rightarrow x\in(-\infty,0)\cup(0,3)$

Asintoti verticali: non ce ne sono visto che il dominio è l'intero asse reale

Asintoti orizzontali: non ce ne sono , infatti $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty, \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Asintoti obliqui: non ce ne sono, infatti $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$

Crescenza e decrescenza:

$y'(x)=-2x^2+4x>0\rightarrow 0<x<2$

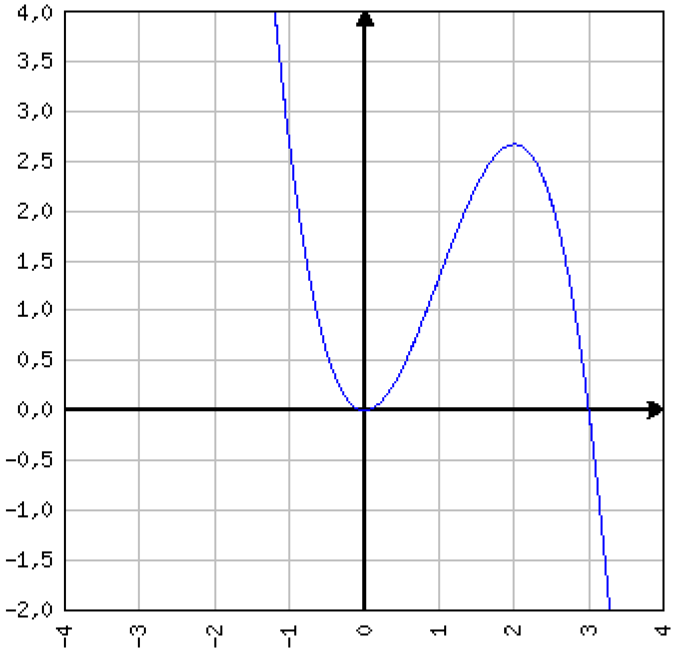
$y''(x)=-4x+4=0\rightarrow x=1$

$y''(0)=4>0$

$y''(2)=-4<0$

Per cui $(0,0)$ è un minimo, $\left(2,\frac{8}{3}\right)$ è un massimo e $\left(1,\frac{4}{3}\right)$ è un flesso.

Ecco il grafico:



Studiamo la funzione $y=\frac{x^3-6x^2+12x}{3}=\frac{x\left(x^2-6x+12\right)}{3}$

Dominio : R

Intersezione asse ascisse: $y=\frac{x^3-6x^2+12}{3}=\frac{x\left(x^2-6x+12\right)}{3}=0 \rightarrow x=0$

Intersezione asse ordinate: $x=0 \rightarrow y=0$

Positività:

$$y=\frac{x\left(x^2-6x+12\right)}{3}>0 \Leftrightarrow x>0$$

Asintoti verticali: non ce ne sono visto che il dominio è l'intero asse reale

Asintoti orizzontali: non ce ne sono , infatti $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty, \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Asintoti obliqui: non ce ne sono, infatti $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$

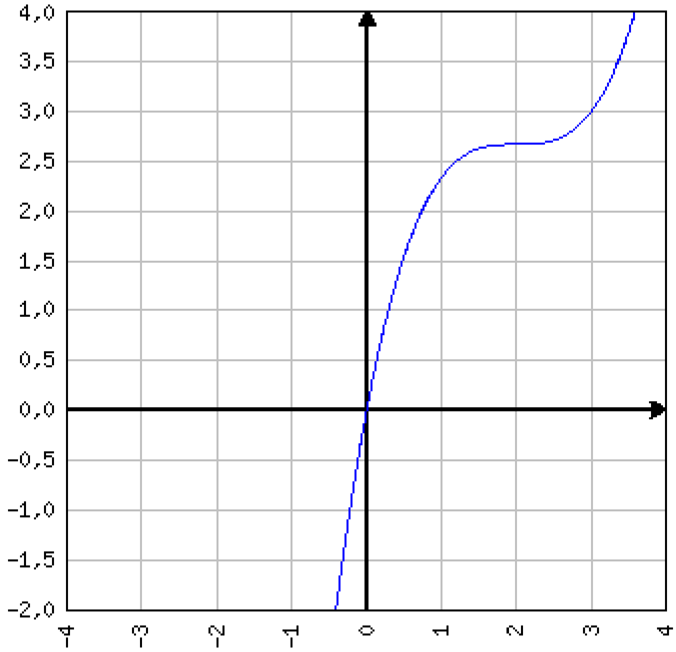
Crescenza e decrescenza:

$y'(x)=x^2-4x+4=(x-2)^2 \geq 0 \ \ \forall x \in R$

$y''(x)=2x-4=0 \rightarrow x=2$

Per cui la funzione è sempre crescente e presenta in $\left(2,\frac{8}{3}\right)$ un flesso a tangente orizzontale.

Ecco il grafico:



Punto 2

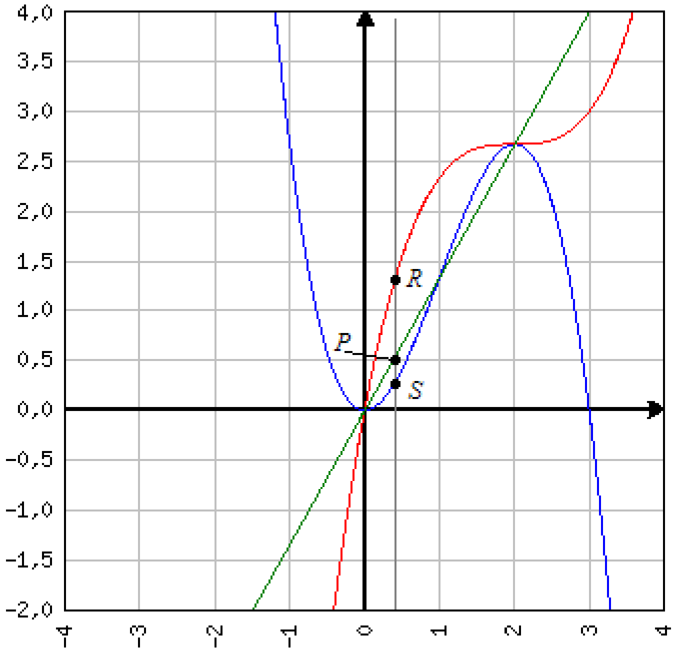
dopo aver verificato che, oltre al punto O, tali grafici hanno in comune un altro punto A, determinare sul segmento OA un punto P tale che, condotta per esso la retta parallela all'asse *y*, sia massima la lunghezza del segmento RS, dove R ed S sono i punti in cui la retta interseca i due grafici suddetti;

Calcoliamo le intersezioni tra le due curve; va risolta l'equazione:

$$\frac{-2x^3+6x^2}{3}=\frac{x^3-6x^2+12x}{3}\rightarrow 3x^3-12x^2+12x=3x\left(x^2-4x+4\right)=3x(x-2)^2=0\rightarrow x=0, x=2$$

I punti in comune sono $O=(0,0), A=\left(2,\frac{8}{3}\right)$

La retta che congiunge questi due punti è la retta $y=\frac{4}{3}x$ per cui il generico punto P ha coordinate $P=\left(k,\frac{4}{3}k\right)$. Consideriamo allora il grafico seguente in cui sono rappresentate sullo stesso sistema le due curve, la retta che congiunge i loro punti di intersezione e la retta parallela all'asse delle ordinate di equazione $x=k$ passante per $P=\left(k,\frac{4}{3}k\right)$:



I punti R ed S avranno coordinate:

$$S=\left(k,\frac{-2k^3+6k^2}{3}\right), R=\left(k,\frac{k^3-6k^2+12k}{3}\right)$$

La retta di equazione $x=k$ deve trovarsi tra le ascisse dei punti O ed A, per cui la limitazione geometrica è $0\le k\le 2$.

La distanza $\overline{RS}$ è:

$$\overline{RS}=f(k)=\left|\frac{k^3-6k^2+12k}{3}-\left(\frac{-2k^3+6k^2}{3}\right)\right|=\left|k^3-4k^2+4k\right|=(k-2)^2|k|, \qquad 0\le k\le 2$$

Poiché deve essere $k\ge 0$ per la limitazione geometrica, allora

$$\overline{RS}=f(k)=\left|k^3-4k^2+4k\right|=(k-2)^2|k|=k(k-2)^2, \qquad 0\le k\le 2$$

Calcoliamo le derivate:

$f'(k)=3k^2-8k+4=(3k-2)(k-2)>0\to k<\frac{2}{3}, k>2$ che con la limitazione $0\le k\le 2$ implica:

$f'(k)>0\to 0\le k<\frac{2}{3}$.

Inoltre $f''(k)=6k-8\Rightarrow f''\left(\frac{2}{3}\right)=-4<0$ per cui il valore che massimizza la distanza $\overline{RS}$ è $k=\frac{2}{3}$ da cui $P=\left(\frac{2}{3},\frac{8}{9}\right)$, la distanza massima è $\overline{RS}_{MAX}=\frac{32}{27}$ ed i punti diventano

$$R=\left(\frac{2}{3},\frac{152}{81}\right), S=\left(\frac{2}{3},\frac{56}{81}\right)$$

Punto 3

determinare le coordinate dei punti di ascisse uguali in cui le due curve hanno tangenti parallele e verificare che, oltre al punto A, si ritrovano i punti R ed S;

Prendiamo ora due punti generici appartenenti alle due curve e di uguale ascissa: le coordinate generiche sono:

$$P=\left(k,\frac{-2k^3+6k^2}{3}\right), Q=\left(k,\frac{k^3-6k^2+12k}{3}\right)$$

La tangente alla curva di equazione $y=\frac{-2x^3+6x^2}{3}$ e passante per P è:

$$y-\left(\frac{-2k^3+6k^2}{3}\right)=m(x-k)$$
$$m=y'(k)=\left[-2x^2+4x\right]_{x=k}=\left(-2k^2+4k\right)$$

Per cui la tangente ha equazione:

$$y=\left(-2k^2+4k\right)(x-k)+\left(\frac{-2k^3+6k^2}{3}\right)$$

Analogamente la tangente alla curva di equazione $y=\frac{x^3-6x^2+12x}{3}$ e passante per Q è:

$$y-\left(\frac{k^3-6k^2+12k}{3}\right)=m(x-k)$$
$$m=y'(k)=\left[(x-2)^2\right]_{x=k}=(k-2)^2$$

Per cui la tangente ha equazione:

$$y=(k-2)^2(x-k)+\left(\frac{k^3-6k^2+12k}{3}\right)$$

Affinché queste due tangenti siano parallele si deve imporre:

$$\left(-2k^2+4k\right)=(k-2)^2\rightarrow 3k^2-8k+4=0\rightarrow (3k-2)(k-2)=0\rightarrow k=\frac{2}{3}, k=2$$

e come si nota si ritrovano i punti A $(k=2)$,R ed S $\left(k=\frac{2}{3}\right)$.

Punto 4

calcolare il volume del solido generato dalla regione finita di piano delimitata dalle due curve quando ruota di un giro completo intorno all'asse *x*.

Il volume è pari a:

$$V=\pi\int_0^2\left[\left(\frac{x^3-6x^2+12x}{3}\right)^2-\left(\frac{-2x^3+6x^2}{3}\right)^2\right]dx=\frac{\pi}{3}\int_0^2\left[-x^6+4x^5+8x^4-48x^3+48x^2\right]dx=$$

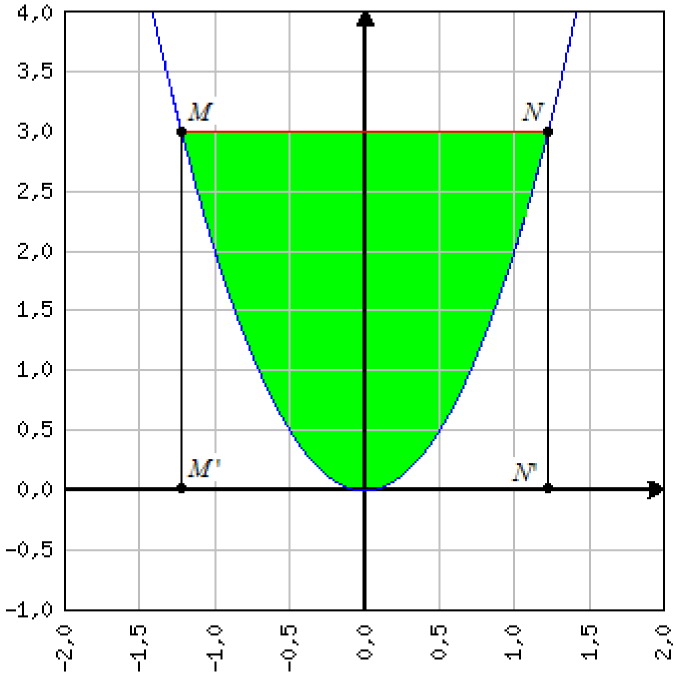
$$=\frac{\pi}{3}\left[-\frac{x^7}{7}+\frac{2x^6}{3}+\frac{8x^5}{5}-12x^4+16x^3\right]_0^2=\frac{\pi}{3}\left[-\frac{128}{7}+\frac{128}{3}+\frac{256}{5}-192+128\right]=\frac{1216}{315}\pi$$

QUESTIONARIO

Quesito 1

In un piano è assegnata una parabola p. Tracciata la tangente t ad essa nel suo vertice, chiamati M ed N due punti di p simmetrici rispetto al suo asse e indicate con M' ed N' rispettivamente le proiezioni ortogonali di M ed N sulla retta t, determinare il rapporto fra l'area della regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta MN e quella del rettangolo MNN'M', fornendo una esauriente dimostrazione.

Consideriamo la figura seguente in cui viene presentata la parabola p di equazione $y = ax^2$ con vertice nell'origine ed asse coincidente con l'asse delle ordinate e i due punti $M = (-k, ak^2), N = (k, ak^2)$ con $k > 0$.



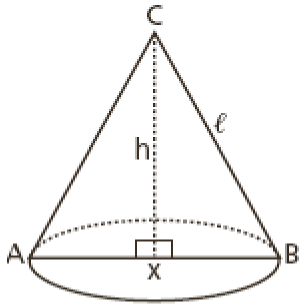
L'area in verde è pari a: $S = \int_{-k}^{k} (ak^2 - ax^2)dx = 2\int_{0}^{k} (ak^2 - ax^2)dx = 2\left[ak^2 x - \frac{ax^3}{3}\right]_0^k = \frac{4ak^3}{3}$. L'area del rettangolo MNN'M' è $S_{MNN'M'} = \overline{MN} \cdot \overline{NN'} = (2k) \cdot (ak^2) = 2ak^3$. Il rapporto tra le due aree è

$$R = \frac{\frac{4ak^3}{3}}{2ak^3} = \frac{2}{3}$$ che esprime il risultato del teorema di Archimede.

Quesito 2

Si consideri un cono circolare retto ottenuto dalla rotazione di un triangolo isoscele intorno all'altezza propriamente detta. Sapendo che il perimetro del triangolo è costante, stabilire quale rapporto deve sussistere fra il lato del triangolo e la sua base affinché il cono abbia volume massimo.

Si consideri la figura seguente raffigurante il triangolo isoscele ABC che ruotando intorno all'altezza propriamente detta genera un cono circolare retto.



Sia $2p_{ABC}=k$ ed $\overline{AB}=x$ con $0<x<\frac{k}{2}$ in quanto la base del triangolo non può essere superiore al semiperimetro.

Di conseguenza $\overline{AC}=\overline{CB}=l=\frac{k-x}{2}$ per cui $h=\sqrt{\left(\frac{k-x}{2}\right)^2-\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{k^2-2kx}$ ed il volume del cono è $V(x)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\pi x^2}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{k^2-2kx}\right)=\frac{\pi}{24}\left(x^2\sqrt{k^2-2kx}\right)$ $0<x<\frac{k}{2}$. La massimizzazione del volume la effettuiamo tramite derivazione. La derivata prima della funzione $V(x)=\frac{\pi}{24}\left(x^2\sqrt{k^2-2kx}\right)$ è $V'(x)=\frac{\pi}{24}\left(\frac{2k^2x-5kx^2}{\sqrt{k^2-2kx}}\right)$ per cui

$$V'(x)=\frac{\pi}{24}\left(\frac{2k^2x-5kx^2}{\sqrt{k^2-2kx}}\right)>0\Rightarrow 0<x<\frac{2k}{5}$$

$$V'(x)=\frac{\pi}{24}\left(\frac{2k^2x-5kx^2}{\sqrt{k^2-2kx}}\right)<0\Rightarrow \frac{2k}{5}<x<\frac{k}{2}$$

$$V'(x)=\frac{\pi}{24}\left(\frac{2k^2x-5kx^2}{\sqrt{k^2-2kx}}\right)=0\Rightarrow x=0\vee x=\frac{2k}{5}$$

Quindi il volume è massimo per $x=\frac{2k}{5}$ e vale $V\left(\frac{2k}{5}\right)=\frac{\pi}{24}\left(\frac{4k^2}{25}\sqrt{k^2-\frac{4k^2}{5}}\right)=\frac{\sqrt{5}\pi k^3}{750}$. Inoltre

$$l=\frac{k-x}{2}=\frac{k-\frac{2k}{5}}{2}=\frac{3k}{10}$$ per cui $$\frac{l}{x}=\frac{\frac{3k}{10}}{\frac{2k}{5}}=\frac{3}{4}.$$

Quesito 3

In un riferimento monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) è assegnata l'iperbole di equazione $y=\frac{1}{x}$. Considerati su di essa i punti A e B di ascisse rispettivamente a ed $\frac{1}{a}$, con

a≠ 0, si traccino le tangenti all'iperbole in A e B. Calcolare l'area della regione piana delimitata dall'iperbole e dalle tangenti considerate.

Affinché i punti A e B siano distinti bisogna imporre $a \neq 1$. I punti A e B hanno coordinate $A = \left(a, \frac{1}{a}\right), B = \left(\frac{1}{a}, a\right)$ e le tangenti in A e B hanno equazioni

$$t_A : y = m_A(x-a) + \frac{1}{a}$$

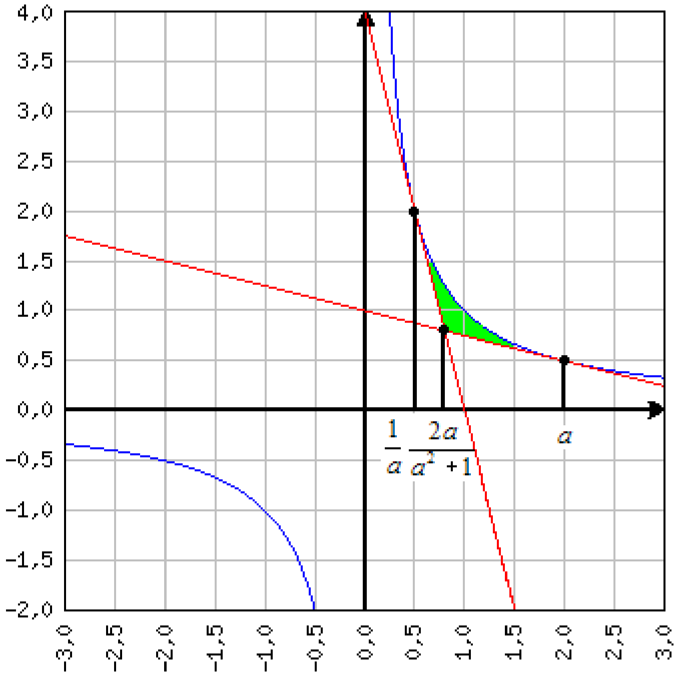
$$t_B : y = m_B\left(x - \frac{1}{a}\right) + a$$

con $m_A = \left[-\frac{1}{x^2}\right]_{x=a} = -\frac{1}{a^2}, m_B = \left[-\frac{1}{x^2}\right]_{x=\frac{1}{a}} = -a^2$ per cui

$$t_A : y = -\frac{1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a} = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}$$

$$t_B : y = -a^2\left(x - \frac{1}{a}\right) + a = -a^2 x + 2a$$

L'intersezione tra le due rette tangenti si ricava imponendo : $-\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a} = -a^2 x + 2a$ da cui $x = \frac{2a}{a^2+1}$. La figura sottostante, raffigurata per $a > 1$, rappresenta in verde l'area da calcolare:



Tale area vale:

$$S=\left|\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{2a}{a^2+1}}\left[\frac{1}{x}-\left(-a^2x+2a\right)\right]dx+\int_{\frac{2a}{a^2+1}}^{a}\left[\frac{1}{x}-\left(-\frac{x}{a^2}+\frac{2}{a}\right)\right]dx\right|=$$

$$=\left|\left[\ln|x|+\frac{\left(a^2x-2a\right)^2}{2a^2}\right]_{\frac{1}{a}}^{\frac{2a}{a^2+1}}+\left[\ln|x|+\frac{(x-2a)^2}{2a^2}\right]_{\frac{2a}{a^2+1}}^{a}\right|=$$

$$=\left|\left[\ln\left(\frac{2a^2}{a^2+1}\right)+\frac{1}{2a^2}\left(\frac{2a^3}{a^2+1}-2a\right)^2-\frac{1}{2a^2}(a-2a)^2\right]+\left[-\ln\left(\frac{2}{a^2+1}\right)+\frac{1}{2a^2}(a-2a)^2-\frac{1}{2a^2}\left(\frac{2a}{a^2+1}-2a\right)^2\right]\right|$$

$$=\left|\left[\ln\left(\frac{2a^2}{a^2+1}\right)+\frac{2}{\left(a^2+1\right)^2}-\frac{1}{2}\right]+\left[-\ln\left(\frac{2}{a^2+1}\right)+\frac{1}{2}-\frac{2a^4}{\left(a^2+1\right)^2}\right]\right|=$$

$$=\left|\left[\ln\left(\frac{2a^2}{a^2+1}\right)-\ln\left(\frac{2}{a^2+1}\right)\right]+\left[\frac{2}{\left(a^2+1\right)^2}-\frac{2a^4}{\left(a^2+1\right)^2}\right]\right|=\left|\ln\left(a^2\right)+\frac{2\left(1-a^4\right)}{\left(a^2+1\right)^2}\right|=\left|\ln\left(a^2\right)+\frac{2\left(1-a^2\right)}{\left(a^2+1\right)}\right|$$

Quesito 4

Dopo aver definito il limite destro e il limite sinistro di una funzione in un punto, ricorrere a tali definizioni per verificare che risulta:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(x+\frac{x}{|x|}\right)=-1,\ \lim_{x\to 0^+}\left(x+\frac{x}{|x|}\right)=1\,.$$

Definiamo limite destro e sinistro:

- Il limite destro per $x\to x_0^+$ di una funzione $f(x)$ è uguale ad l se: $\forall\varepsilon>0$, piccolo a piacere, $\exists\delta(\varepsilon)>0$ tale che se $x\in\left(x_0,x_0+\delta\right)$ si ha $|f(x)-l|<\varepsilon$ o equivalentemente $l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon$.
- Il limite sinistro per $x\to x_0^-$ di una funzione $f(x)$ è uguale ad l se: $\forall\varepsilon>0$, piccolo a piacere, $\exists\delta(\varepsilon)>0$ tale che se $x\in\left(x_0-\delta,x_0\right)$ si ha $|f(x)-l|<\varepsilon$ o equivalentemente $l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon$.

Applichiamo la definizione di limite sinistro per provare che $\lim_{x\to 0^-}\left(x+\frac{x}{|x|}\right)=-1$. Dobbiamo trovare i valori di x per cui $\left|x+\frac{x}{|x|}+1\right|<\varepsilon$. La disequazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x+\frac{x}{|x|}+1<\varepsilon \\ x+\frac{x}{|x|}+1>-\varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x+2<\varepsilon \\ x+2>-\varepsilon \end{cases} \vee \begin{cases} x<0 \\ x<\varepsilon \\ x>-\varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x+2<\varepsilon \\ x+2>-\varepsilon \end{cases} \vee -\varepsilon<x<0$$

Poiché per ipotesi $\varepsilon>0$ è piccolo a piacere, allora possiamo considerare $0<\varepsilon<2$ ed in questo modo il sistema $\begin{cases} x\ge 0 \\ x+2<\varepsilon \\ x+2>-\varepsilon \end{cases}$ è impossibile per cui la disequazione $\left|x+\frac{x}{|x|}+1\right|<\varepsilon$ è soddisfatta per $-\varepsilon<x<0$. Quindi scelto $\delta=\varepsilon$ vale la condizione di limite sinistro in quanto si ha $|f(x)-l|<\varepsilon$ per $x\in(-\varepsilon,0)$.

Applichiamo la definizione di limite destro per provare che $\lim_{x\to 0^+}\left(x+\frac{x}{|x|}\right)=1$. Dobbiamo trovare i valori di x per cui $\left|x+\frac{x}{|x|}-1\right|<\varepsilon$. La disequazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x+\frac{x}{|x|}-1<\varepsilon \\ x+\frac{x}{|x|}-1>-\varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x<\varepsilon \\ x>-\varepsilon \end{cases} \vee \begin{cases} x<0 \\ x-2<\varepsilon \\ x-2>-\varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow 0\le x<\varepsilon \vee \begin{cases} x<0 \\ x-2<\varepsilon \\ x-2>-\varepsilon \end{cases}$$

Poiché per ipotesi $\varepsilon>0$ è piccolo a piacere, allora possiamo considerare $0<\varepsilon<2$ ed in questo modo il sistema $\begin{cases} x<0 \\ x-2<\varepsilon \\ x-2>-\varepsilon \end{cases}$ è impossibile per cui la disequazione $\left|x+\frac{x}{|x|}-1\right|<\varepsilon$ è soddisfatta per $0\le x<\varepsilon$. Quindi scelto $\delta=\varepsilon$ vale la condizione di limite destro in quanto si ha $|f(x)-l|<\varepsilon$ per $x\in(0,\varepsilon)$.

Quesito 5

Considerata la funzione $f(x)=2+\sqrt[3]{x-2}$, stabilire se è continua e derivabile nel punto x=2 e fornire un'interpretazione geometrica delle conclusioni.

La funzione $f(x)=2+\sqrt[3]{x-2}$ è continua e definita su tutto R ed in particolare $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\left(2+\sqrt[3]{x-2}\right)= f(2)=2$. La derivata prima è $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}$ e essa non è definita in $x=2$ in quanto $\lim_{x\to 2} f'(x)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}\right)=+\infty$, per cui la funzione $f(x)=2+\sqrt[3]{x-2}$ è continua ma non è derivabile in $x=2$ in cui presenta un flesso ascendente a tangente verticale.

Quesito 6

Dimostrare la formula che esprime il numero delle combinazioni semplici di n oggetti presi a k a k in funzione del numero delle disposizioni semplici degli stessi oggetti presi a k a k e delle permutazioni semplici su k oggetti.

Si dicono combinazioni semplici di n elementi diversi presi a k (con n>k) a k (o di classe k) tutti i possibili gruppi che si possono formare prendendo k dagli n elementi in modo da considerare distinti soltanto quei gruppi che differiscono per la natura di almeno un elemento. Si dicono, invece, disposizioni semplici di n elementi diversi presi a k a k (o di classe k) (con n>k) tutti i possibili gruppi che si possono formare prendendo k degli n elementi in modo da considerare distinti quei gruppi che differiscono, o per la natura degli elementi, o per il loro ordine. Confrontando la definizione di *combinazioni semplici* con quella delle *disposizioni semplici*, potremo dire che per esempio, i due gruppi $\{abc, acb\}$ sono due disposizioni diverse (differiscono per l'ordine degli elementi) ma formano la stessa combinazione.

Dal precedente esempio risulta evidente che ogni combinazione può generare tante disposizioni quante sono le permutazioni dei suoi k elementi.

Il numero disposizioni semplici di n elementi diversi presi a k a k (o di classe k) (con n>k) è dato matematicamente dal prodotto di k numeri interi consecutivi decrescenti a partire da n:

$$D_{n,k}=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

Il numero di permutazioni semplici di k elementi è dato matematicamente dal numero disposizioni semplici di k elementi presi a k a k:

$$P_k=D_{k,k}=k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\cdots\cdots\cdot 2\cdot 1=k!$$

Il numero di combinazioni semplici di n elementi diversi presi a k (con n>k) a k (o di classe k) è dato dal rapporto tra disposizioni semplici di n elementi diversi presi a k a k (o di classe k) (con n>k) e permutazioni semplici di k elementi:

$$C_{n,k}=\frac{D_{n,k}}{P_k}=\frac{n!}{(n-k)\cdot k!!}=\binom{n}{k}$$

dove $\binom{n}{k}$ è conosciuto come coefficiente binomiale e la formula $C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)\cdot k!!} = \binom{n}{k}$ è nota come legge dei tre fattoriali.

Quesito 7

Un'urna contiene 100 palline numerate da 1 a 100. Determinare la probabilità che estraendo a caso una pallina, essa sia contrassegnata da un numero:

divisibile per 10 o per 8,

divisibile per 10 e per 8,

non divisibile per 10 né per 8.

Consideriamo i seguenti eventi:

$E_1 = \{\text{Pallina contrassegnata da numero divisibile per } 8\}$

$E_2 = \{\text{Pallina contrassegnata da numero divisibile per } 10\}$

Le palline contrassegnate da numeri divisibili per 10 sono 10 $\{10,20,30,40,50,60,70,80,90,100\}$, mentre quelle contrassegnate da numeri divisibili per 8 sono 12 $\{8,16,24,32,40,48,56,64,72,80,88,96\}$ per cui $P(E_1) = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}, P(E_2) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$.

Ricordiamo che per 2 eventi generici si ha $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$ che diventa $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ per eventi mutuamente esclusivi, quelli per cui il verificarsi di un evento esclude il verificarsi dell'altro. Nel nostro caso i due eventi non sono mutuamente esclusivi in quanto esistono 2 palline contrassegnate da numeri divisibili sia per 8 che per 10 e sono $\{40,80\}$, per cui $P(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$.

Quindi $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{3}{25} + \frac{1}{10} - \frac{1}{50} = \frac{6+5-1}{50} = \frac{1}{5}$. La probabilità di estrarre una pallina contrassegnata da numero divisibile per 8 e per 10 è $P(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$, mentre la probabilità di estrarre una pallina contrassegnata da numero non divisibile né per 8 né per 10 è $P(\overline{E_1 \cup E_2}) = 1 - P(E_1 \cup E_2) = \frac{4}{5}$.

Quesito 8

Con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), determinare le coordinate del baricentro del triangolo in cui l'omotetia di centro (1, 2) e caratteristica 1/4 trasforma il triangolo di vertici (4, 0), (-4, 4), (0, 8).

Le equazioni dell'omotetia di centro (1,2) e caratteristica 1/4 sono:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{4}(x-1)+1 \\ y' = \frac{1}{4}(y-2)+2 \end{cases}$$

In un'omotetia, il trasformato del baricentro coincide col baricentro del trasformato. Il baricentro del triangolo di partenza è $G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right) = (0,4)$ per cui le coordinate del baricentro del triangolo trasformato si ricavano dal sistema $\begin{cases} x' = \frac{1}{4}(0-1)+1 = \frac{3}{4} \\ y' = \frac{1}{4}(4-2)+2 = \frac{5}{2} \end{cases} \to G' = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{2} \right)$.

Quesito 9

Tra le affinità di equazioni

$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = cx + dy \end{cases}$$

assegnate in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), determinare quella che trasforma i punti di coordinate $\left(3, \sqrt{2}\right)$ e $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$ ordinatamente nei punti di coordinate $\left(\frac{1}{3}, \frac{7\sqrt{2}}{3} \right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2 \right)$.

Sostituendo alle equazioni dell'affinità le coordinate dei punti corrispondenti si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3a + b\sqrt{2} = \frac{1}{3} \\ 3c + d\sqrt{2} = \frac{7\sqrt{2}}{3} \\ \frac{3\sqrt{2}a}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}c}{2} = 2 \end{cases} \to \begin{cases} 3a + b\sqrt{2} = \frac{1}{3} \\ 3c + d\sqrt{2} = \frac{7\sqrt{2}}{3} \\ a = -\frac{1}{3} \\ c = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases} \to \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{3} - 3a \right) \\ c = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ d = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{7\sqrt{2}}{3} - 3c \right) \end{cases} \to \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ c = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ d = \frac{1}{3} \end{cases}$$

per cui l'affinità cercata è $\begin{cases} X = -\frac{1}{3}x + \frac{2\sqrt{2}}{3}y \\ Y = \frac{2\sqrt{2}}{3}x + \frac{1}{3}y \end{cases}$

Quesito 10

Scrivere un algoritmo che risolva il problema di determinare una radice approssimata di un’equazione con un’approssimazione voluta.

Uno dei metodi numerici studiati ed utilizzati per determinare una radice approssimata di un’equazione con un’approssimazione voluta è il metodo di bisezione. Supponiamo di voler trovare la suddetta radice nell’intervallo (a,b) in cui $f(a)\cdot f(b)<0$ e supponiamo per ipotesi che $f(a)<0, f(b)>0$ e di voler trovare la radice con un’approssimazione $e>0$. L’algoritmo in pseudocodice è il seguente:

- Inizio programma calcolo radice approssimata
- Definire la variabile approssimazione $e>0$
- Definire ed inizializzare la variabile a col valore dell’estremo sinistro dell’intervallo in cui ricade la radice
- Definire ed inizializzare la variabile b col valore dell’estremo sinistro dell’intervallo in cui ricade la radice
- Definire ed inizializzare la variabile $R_1 = f(a)$
    - Iniziare il ciclo di iterazione (*While)*
    - Definire e calcolare la variabile valor medio $c=\frac{a+b}{2}$
    - Definire e inizializzare la variabile $R_M = 0$
    - Calcolare la variabile $R_M = f(c)$
    - Ciclo di selezione (*If-Then-Else)*: Se $R_1 \cdot R_M > 0$
        - Allora $a=c$, $R_1 = R_M$
        - Altrimenti $b=c$
    - Sino a quando $b-a<e$
- Stampare c
- Fine programma calcolo radice approssimata