

(Buenos Aires - Lima)

NUOVO ESAME DI STATO: Indirizzo **Scientifico**

**Sessione 2002** (suppletiva)

SECONDA PROVA SCRITTA

Tema di MATEMATICA

*Il candidato risolve uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario:*

**PROBLEMA 1**

In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali ( $Oxy$ ), è assegnata la parabola  $p$  di equazione:

$$y = x^2 + x + 1$$

- Condotte per il punto  $O$  le rette tangenti alla parabola, trovare le coordinate dei punti  $A$  e  $B$  di contatto.
- Trovare le coordinate del punto  $C$ , situato da parte opposta di  $O$  rispetto alla retta  $AB$ , tale che il triangolo  $ABC$  sia isoscele e rettangolo in  $C$ .
- Determinare l'equazione della circonferenza  $k$  avente il centro in  $C$  e passante per  $A$ .
- Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco  $AB$  di parabola e dai segmenti  $CA$  e  $CB$ .
- Determinare in quante parti la parabola  $p$  divide il cerchio delimitato da  $k$ .

**PROBLEMA 2**

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali ( $Oxy$ ), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = -x^3 + mx^2 - m + 3,$$

dove  $m$  è un parametro reale.

- Dimostrare che le curve hanno due punti in comune.
- Determinare, tra le curve assegnate, la curva  $\gamma$  avente un flesso nel punto di ascissa 1.
- Per il punto  $A$ , di ascissa  $\frac{1}{2}$  condurre le due rette tangenti a  $\gamma$  e indicare con  $B$  e  $C$  ( $x_B > x_C$ ) i punti che tali rette tangenti hanno in comune con  $\gamma$ , oltre al punto  $A$ .
- Sull'arco  $AB$  di  $\gamma$  trovare un punto  $P$  in modo che l'area del triangolo  $APB$  sia massima.
- Calcolare la tangente dell'angolo formato dalle due suddette rette tangenti a  $\gamma$ .

QUESTIONARIO

1. Una piramide si dice retta:

- A) se gli spigoli che concorrono nel suo vertice propriamente detto sono due a due perpendicolari;
- B) se almeno un angolo del poligono di base è retto;
- C) se l'altezza è perpendicolare alla base;
- D) per una ragione diversa dalle precedenti.

Una sola risposta è corretta: individuarla.

2. Calcolare il volume di un ottaedro regolare, conoscendo la lunghezza  $s$  di un suo spigolo.

3. La cifra delle unità dello sviluppo della potenza  $2^{2002}$  è:

- A) 2 ; B) 4 ; C) 6 ; D) 8 .

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

4. Considerata la seguente equazione in  $x$ :

$$2x^2 - 4x - 3 = 0$$

e indicate con  $x'$  ed  $x''$  le sue soluzioni, calcolare il valore della seguente espressione:

$$(x'^2 + x''^2)^3 + (x'^2 \cdot x''^2)^3 - (x' + x'') - (x' \cdot x'')$$

5. Calcolare la derivata, rispetto ad  $x$ , della funzione  $f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{1-t^2} dt$

6. Determinare il dominio di continuità e quello di derivabilità della funzione  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

7. Enunciare il teorema di De L'Hôpital e stabilire se può essere applicato per calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 3x}{\sin x + 2x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + 3x}{\sin x + 2x}$$

- Durata della prova: 6 ore.
- Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.
- È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

**PROBLEMA 1**

In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la parabola  $p$  di equazione:

$$y = x^2 + x + 1$$

*Punto 1*

**Condotte per il punto O le rette tangenti alla parabola, trovare le coordinate dei punti A e B di contatto.**

La generica retta tangente ha equazione  $y = mx$ . Imponendo l'intersezione tra la retta e la parabola otteniamo l'equazione  $x^2 - (m-1)x + 1 = 0$  e imponendo che il delta sia nullo si ha  $\Delta = (m-1)^2 - 4 = m^2 - 2m - 3 = (m-3)(m+1) = 0 \Rightarrow m_1 = 3 \vee m_2 = -1$  per cui le due rette tangenti sono  $y = 3x$  e  $y = -x$ . Il punto di contatto A si trova intersecando la parabola con  $y = 3x$ ; in questo caso otteniamo l'equazione  $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$  per cui  $A = (1,3)$ . Il punto di contatto B si trova intersecando la parabola con  $y = -x$ ; in questo caso otteniamo l'equazione  $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$  per cui  $B = (-1,1)$ .

*Punto 2*

**Trovare le coordinate del punto C, situato da parte opposta di O rispetto alla retta AB, tale che il triangolo ABC sia isoscele e rettangolo in C.**

Sia C di coordinate generiche  $C = (x, y)$ . I lati del triangolo ABC misurano:

$$\overline{AC} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(1+1)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2}$$

Il triangolo è isoscele, per cui imponendo  $\overline{AC} = \overline{BC}$  si ha

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2} \xrightarrow[\text{ambo i membri}]{\text{Elevando al quadrato}} x + y - 2 = 0; \text{ il triangolo è}$$

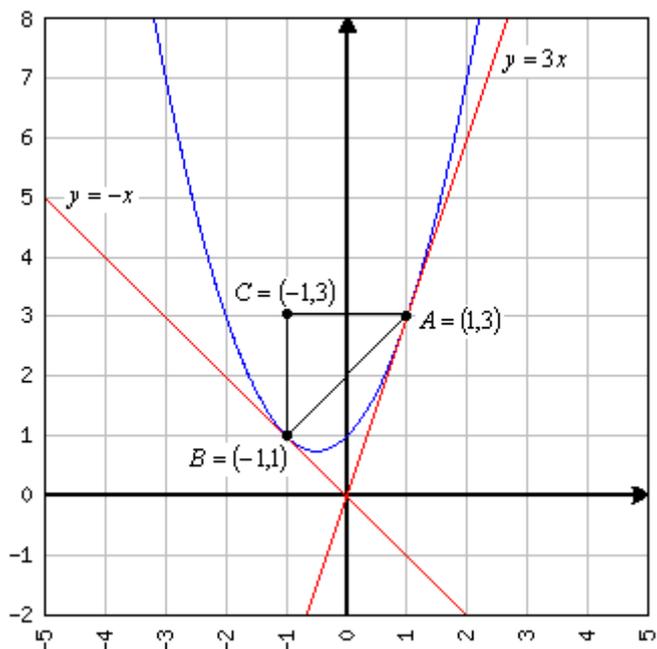
rettangolo in C per cui imponendo  $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$  si ha

$$(x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10) + (x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2) = 8 \rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0. \text{ Bisogna risolvere il}$$

sistema  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$ . Sostituendo la seconda nella prima si ha

$$(2-y)^2 + y^2 - 4y + 2 = 0 \Rightarrow y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow y_1 = 1 \vee y_2 = 3 \text{ da cui } x_1 = 1 \vee x_2 = -1. \text{ I punti}$$

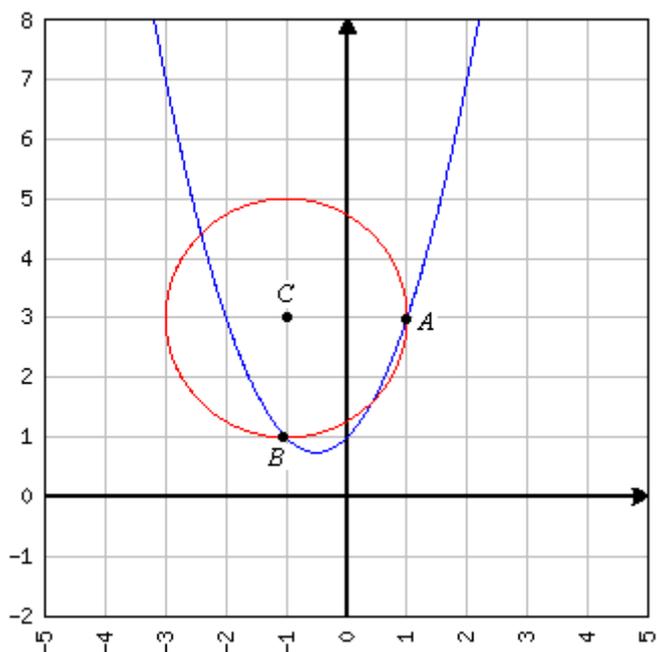
possibili sono allora  $C_1 = (1,1), C_2 = (-1,3)$ . Poichè  $C$  deve essere situato da parte opposta di  $O$  rispetto alla retta  $AB$  allora  $C \equiv C_2 = (-1,3)$ . Il grafico sottostante rappresenta quanto trovato.



**Punto 3**

**Determinare l'equazione della circonferenza  $k$  avente il centro in  $C$  e passante per  $A$ .**

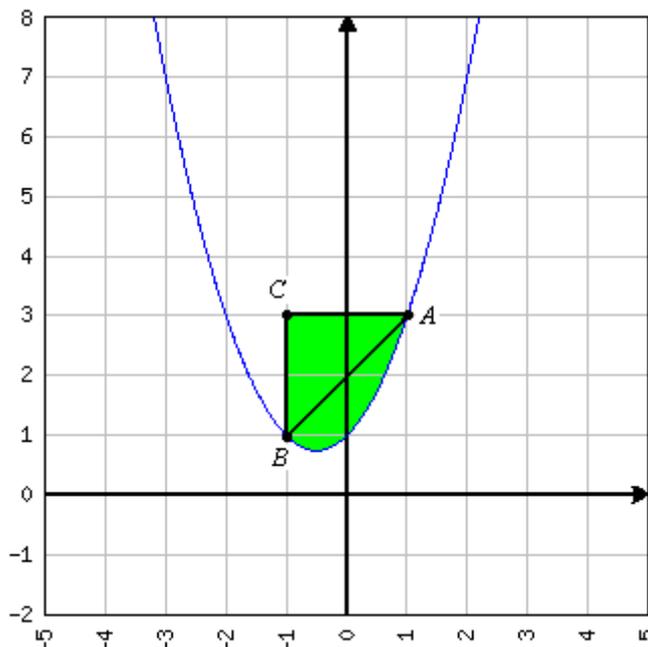
Il raggio della circonferenza è  $\overline{AC} = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-3)^2} = 2$  per cui l'equazione della circonferenza è  $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ . Poichè  $\overline{AC} = \overline{CB}$  la circonferenza passerà anche per  $B = (-1,1)$ .



**Punto 4**

**Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco AB di parabola e dai segmenti CA e CB.**

L'area da calcolare è rappresentata in verde nella figura sottostante:



La retta AB ha equazione  $\frac{y-3}{1-3} = \frac{x-1}{-1-1} \Rightarrow y = x + 2$ .

Il triangolo ABC ha area  $S_{ABC} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{CB}}{2} = 2$  mentre l'area sottesa dal segmento AB con la parabola

è  $S_{AB/p} = \int_{-1}^1 (x+2 - x^2 - x-1) dx = \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = 2 \int_0^1 (1-x^2) dx = 2 \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}$  per cui l'area

richiesta è  $S = S_{ABC} + S_{AB/p} = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$ .

**Punto 5**

**Determinare in quante parti la parabola p divide il cerchio delimitato da k**

Calcoliamo le intersezioni della parabola con la circonferenza. Bisogna risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0 \\ y = x^2 + x + 1 \end{cases}$$

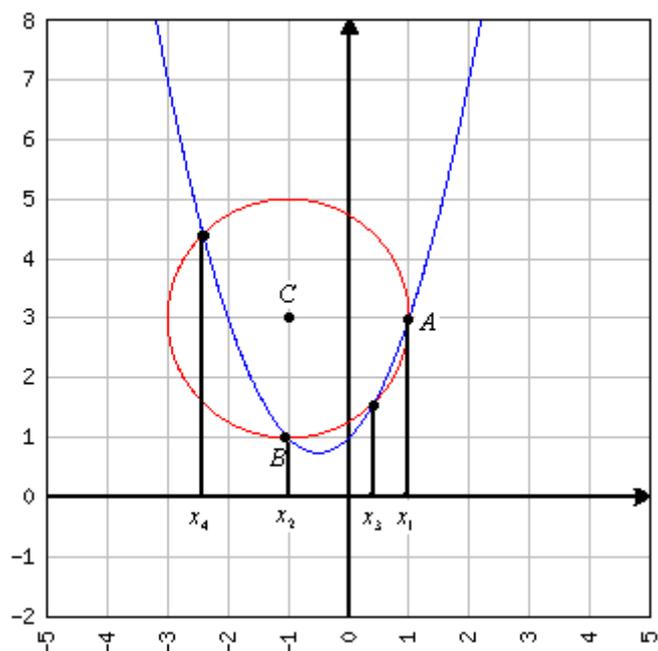
Sostituendo la seconda nella prima si ottiene l'equazione  $x^2 + (x^2 + x + 1)^2 + 2x - 6(x^2 + x + 1) + 6 = 0$

da cui  $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$ .

Raggruppando si ha:

$$\begin{aligned} (x^4 - 2x^2 + 1) + (2x^3 - 2x) &= 0 \Rightarrow (x^2 - 1)^2 + 2x(x^2 - 1) = \\ &= (x^2 - 1)(x^2 + 2x - 1) = (x^2 - 1)(x + 1 - \sqrt{2})(x + \sqrt{2} + 1) = 0 \Rightarrow \\ x_1 &= 1, x_2 = -1, x_3 = (\sqrt{2} - 1), x_4 = (-\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

La figura sottostante rappresenta le 4 intersezioni tra parabola e circonferenza:



In conclusione la parabola suddivide la circonferenza in 4 parti.

**PROBLEMA 2**

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = -x^3 + mx^2 - m + 3,$$

dove  $m$  è un parametro reale.

*Punto 1*

**Dimostrare che le curve hanno due punti in comune.**

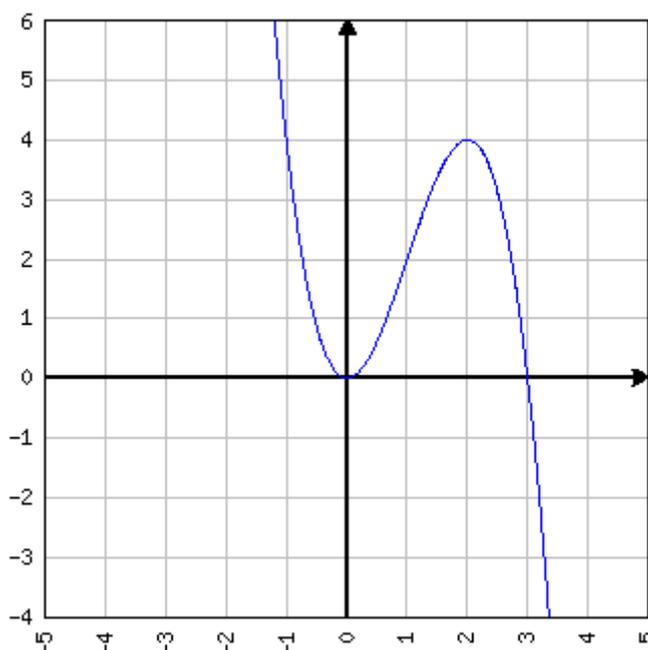
La cubica può essere scritta come  $y = -x^3 + 3 + m(x^2 - 1)$  per cui i punti base di essa si possono

trovare risolvendo il sistema  $\begin{cases} (x^2 - 1) = 0 \\ y = -x^3 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 4 \end{cases}$

*Punto 2*

**Determinare, tra le curve assegnate, la curva  $\gamma$  avente un flesso nel punto di ascissa 1.**

Le derivata seconda della cubica è  $y'' = -6x + 2m$ . Essa ha un flesso nel punto di ascissa 1 se  $y''(1) = -6 + 2m = 0 \Rightarrow m = 3$ . Quindi  $\gamma: y = -x^3 + 3x^2$ . Tale curva è definita su tutto  $\mathbb{R}$ , interseca l'asse delle ascisse in (0,0) e (3,0) e quello delle ordinate in (0,0), è positiva o nulla in  $(-\infty, 3)$ , non presenta asintoti ed è strettamente crescente in  $(0, 2)$  e strettamente decrescente in  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$  per cui presenta un minimo relativo in (0,0) e un massimo relativo in (2,4). Presenta inoltre il sopracitato flesso a tangente obliqua in (1,2). Il grafico di seguito.



*Punto 3*

**Per il punto A, di ascissa  $\frac{1}{2}$  condurre le due rette tangenti a  $\gamma$  e indicare con B e C ( $x_B > x_C$ ) i punti che tali rette tangenti hanno in comune con  $\gamma$ , oltre al punto A.**

Il punto A è  $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right)$ . Una prima retta tangente è quella tangente alla cubica in A ed essa ha

equazione  $y = m\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{8}$  con  $m = y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$  per cui la prima tangente ha equazione

$y = \frac{9}{4}x - \frac{1}{2}$ . Troviamo i punti di intersezione tra la cubica  $\gamma: y = -x^3 + 3x^2$  e la tangente

$y = \frac{9}{4}x - \frac{1}{2}$ : intersecandole si ha l'equazione risolvente

$$4x^3 - 12x^2 + 9x - 2 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2(x - 2) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = 2.$$

L'altra retta tangente ha equazione generica  $y = m\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{8}$ . Intersechiamo tale retta con la cubica

e otteniamo l'equazione risolvente  $x^3 - 3x^2 + mx - \frac{m}{2} + \frac{5}{8} = 0$ . Un divisore di

$\left(x^3 - 3x^2 + mx - \frac{m}{2} + \frac{5}{8}\right)$  è sicuramente  $\left(x - \frac{1}{2}\right)$  dal momento che sia la retta che la cubica hanno in

comune il punto di ascissa  $\frac{1}{2}$ ; il polinomio  $\left(x^3 - 3x^2 + mx - \frac{m}{2} + \frac{5}{8}\right)$  allora è scomponibile come

$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{5x}{2} + m - \frac{5}{4}\right)$  per cui l'equazione risolvente diventa  $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{5x}{2} + m - \frac{5}{4}\right) = 0$ . Per

ottenere la retta tangente dobbiamo imporre che il delta dell'equazione di secondo grado

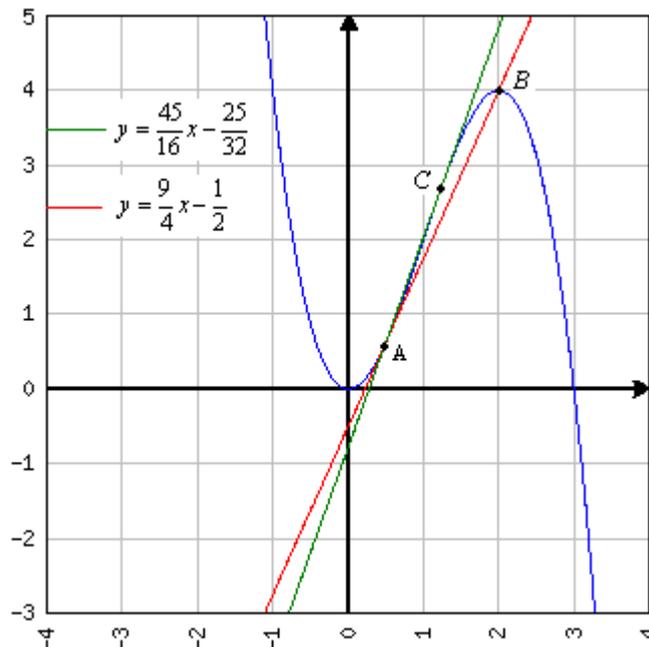
$\left(x^2 - \frac{5x}{2} + m - \frac{5}{4}\right) = 0$  sia nullo e ciò avviene se  $\Delta = \frac{25}{4} - 4\left(m - \frac{5}{4}\right) = -4m + \frac{45}{4} = 0 \Rightarrow m = \frac{45}{16}$  per

cui la seconda retta tangente ha equazione  $y = \frac{45}{16}x - \frac{25}{32}$ . Troviamo i punti di intersezione tra la

cubica  $\gamma: y = -x^3 + 3x^2$  e la tangente  $y = \frac{45}{16}x - \frac{25}{32}$ : intersecandole si ha l'equazione risolvente

$32x^3 - 96x^2 + 90x - 25 = 32\left(x - \frac{5}{4}\right)^2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = \frac{5}{4}$ . I punti di intersezione, oltre

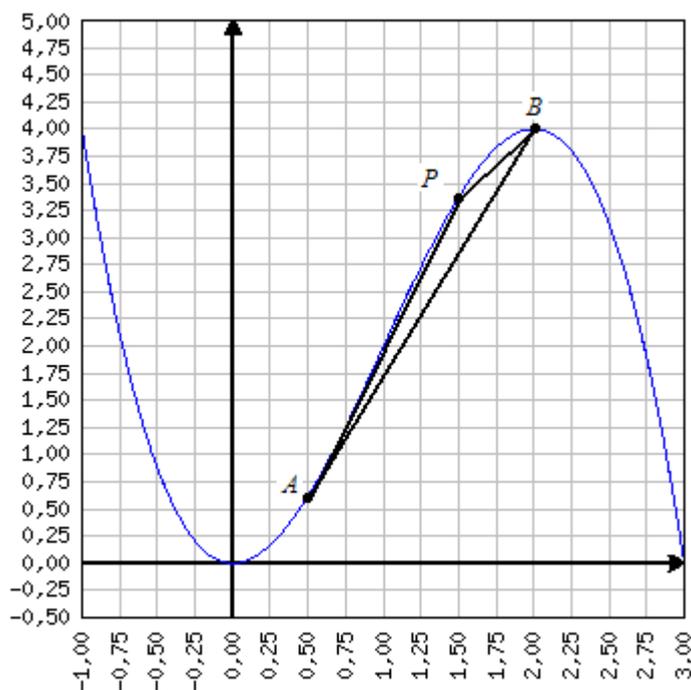
$A = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right)$ , sono allora  $B = (2,4)$  e  $C = \left(\frac{5}{4}, \frac{175}{64}\right)$ . La figura sottostante evidenzia quanto detto.



**Punto 4**

**Sull'arco AB di  $\gamma$  trovare un punto P in modo che l'area del triangolo APB sia massima.**

Consideriamo la figura sottostante:



Un punto P generico della cubica appartenente all'arco AB ha coordinate  $P = (x, 3x^2 - x^3)$  con

$\frac{1}{2} < x < 2$ . La retta AB ha equazione  $\frac{y - \frac{5}{8}}{4 - \frac{5}{8}} = \frac{x - \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}} \rightarrow 9x - 4y - 2 = 0$  mentre il segmento AB

misura  $\overline{AB} = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{5}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{729}{64}} = \frac{3}{8}\sqrt{97}$ . L'altezza del triangolo ABP è la distanza

di  $P = (x, 3x^2 - x^3)$  dalla retta  $9x - 4y - 2 = 0$  e misura

$$h(x) = \frac{|9x - 4(3x^2 - x^3) - 2|}{\sqrt{97}} = \frac{|4x^3 - 12x^2 + 9x - 2|}{\sqrt{97}} = \frac{|(x-2)(2x-1)|}{\sqrt{97}} \xrightarrow{\frac{1}{2} < x < 2} h(x) = \frac{(2-x)(2x-1)^2}{\sqrt{97}}$$

L'area del triangolo ABP è  $S(x) = \frac{3\sqrt{97}}{16} h(x) = \frac{3}{16} [(2-x)(2x-1)^2]$  ed è massima quando è massima

l'altezza  $h(x)$ . La massimizzazione dell'area o dell'altezza  $h(x)$  equivale alla massimizzazione della funzione  $g(x) = (2-x)(2x-1)^2$ . Calcoliamo la derivata prima e seconda della funzione

$g(x) = (2-x)(2x-1)^2$ : esse sono rispettivamente  $g'(x) = 3(3-2x)(2x-1)$ ,  $g''(x) = 24(1-x)$  per cui

per  $\frac{1}{2} < x < 2$  si ha:

$$g'(x) = 3(3-2x)(2x-1) > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

$$g'(x) = 3(3-2x)(2x-1) < 0 \Rightarrow \frac{3}{2} < x < 2$$

$$g'(x) = 3(3-2x)(2x-1) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$g''\left(\frac{3}{2}\right) = 24\left(1 - \frac{3}{2}\right) = -12 < 0$$

Dalle considerazioni soprastanti deduciamo che l'area del triangolo APB è massima per  $x = \frac{3}{2}$  cui

corrisponde  $P = \left(\frac{3}{2}, \frac{27}{8}\right)$  e l'area massima  $S_{MAX} = \frac{3}{16} g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{8}$ .

**Punto 5**

**Calcolare la tangente dell'angolo formato dalle due suddette rette tangenti a  $\gamma$ .**

L'angolo  $\alpha$  tra le due tangenti si ricava dalla formula  $\tan(\alpha) = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right| = \left| \frac{\frac{45}{16} - \frac{9}{4}}{1 + \frac{405}{64}} \right| = \frac{36}{469}$ .

**QUESTIONARIO**

*Quesito 1*

**Una piramide si dice retta:**

- A) se gli spigoli che concorrono nel suo vertice propriamente detto sono due a due perpendicolari;**
- B) se almeno un angolo del poligono di base è retto;**
- C) se l'altezza è perpendicolare alla base;**
- D) per una ragione diversa dalle precedenti.**

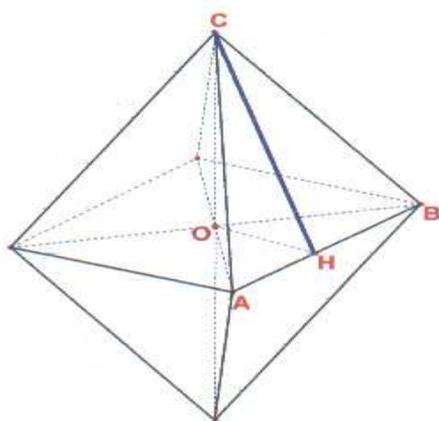
**Una sola risposta è corretta: individuarla.**

Una piramide si dice retta se il poligono di base è circoscrittibile ad una circonferenza e il piede dell'altezza coincide con il centro di questa circonferenza. Ecco per cui la risposta corretta è la D.

*Quesito 2*

**Calcolare il volume di un ottaedro regolare, conoscendo la lunghezza  $s$  di un suo spigolo.**

In geometria solida, l'ottaedro è un poliedro con otto facce triangolari. L'ottaedro regolare è uno dei cinque solidi platonici, le cui facce sono triangoli equilateri. Ha sei vertici e dodici spigoli. La figura seguente mostra l'ottaedro regolare.



Il volume dell'ottaedro è il doppio del volume della piramide a base quadrata di area  $s^2$  ed altezza

$\overline{CO}$ . Poiché le facce son triangoli equilateri si ha  $\overline{CH} = \frac{s\sqrt{3}}{2}$  mentre  $\overline{OH} = \frac{s}{2}$  per cui

$$\overline{CO} = \sqrt{\left(\frac{s\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \frac{s\sqrt{2}}{2} \quad \text{per cui il volume dell'ottaedro è}$$

$$V = 2\left(\frac{A_{BASE} \cdot \overline{CO}}{3}\right) = 2\left(\frac{s^2}{3} \cdot \frac{s\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{s^3\sqrt{2}}{3}.$$

*Quesito 3*

**La cifra delle unità dello sviluppo della potenza  $2^{2002}$  è:**

**A) 2 ; B) 4 ; C) 6 ; D) 8 .**

**Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.**

Le cifre delle unità delle potenze di 2 si ripetono periodicamente con periodo  $T = 4$  e sono  $\{2,4,8,6\}$ ;

infatti basti pensare alle prime 8 potenze:  $\left\{ \underbrace{2,4,8,16}_{T=4}, \underbrace{32,64,128,256}_{T=4} \right\}$ . Ora  $2^{2002} = 2^{2000} \cdot 2^2$  e poichè

2000 è divisibile per 4 allora  $2^{2000}$  sarà un numero che ha la cifra dell'unità pari a 6 per cui  $2^{2002} = 2^{2000} \cdot 2^2 = 2^{2000} \cdot 4$  avrà la cifra dell'unità pari a 4. Quindi la risposta corretta è la B.

*Quesito 4*

**Considerata la seguente equazione in  $x$ :**

$$2x^2 - 4x - 3 = 0$$

**e indicate con  $x'$  ed  $x''$  le sue soluzioni, calcolare il valore della seguente espressione:**

$$(x'^2 + x''^2)^3 + (x'^2 \cdot x''^2)^3 - (x' + x'') - (x' \cdot x'')$$

Le soluzioni di  $2x^2 - 4x - 3 = 0$  sono le soluzioni di  $x^2 - 2x - \frac{3}{2} = 0$ ; quindi la somma delle

soluzioni sarà  $(x' + x'') = 2$  e il prodotto sarà  $(x' \cdot x'') = -\frac{3}{2}$ . L'espressione da calcolare diventa allora:

$$\begin{aligned} (x'^2 + x''^2)^3 + (x'^2 \cdot x''^2)^3 - (x' + x'') - (x' \cdot x'') &= [(x' + x'')^2 - 2(x' \cdot x'')]^3 + (x' \cdot x'')^6 - (x' + x'') - (x' \cdot x'') = \\ &= \left[ (2)^2 - 2\left(-\frac{3}{2}\right) \right]^3 + \left(-\frac{3}{2}\right)^6 - (2) - \left(-\frac{3}{2}\right) = 7^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^6 - 2 + \frac{3}{2} = 343 + \frac{729}{64} - \frac{1}{2} = \frac{22649}{64}. \end{aligned}$$

*Quesito 5*

**Calcolare la derivata, rispetto ad  $x$ , della funzione  $f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{1-t^2} dt$**

La derivata di  $f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{1-t^2} dt$ , applicando il teorema della derivata di una funzione integrale, è

$$f'(x) = \frac{d(\sqrt{x})}{dx} \cdot \left[ \sqrt{1-t^2} \right]_{t=\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sqrt{1-x} = \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-x}{x}}. \quad \text{Procediamo anche tramite}$$

risoluzione diretta dell'integrale. L'integrale  $\int \sqrt{1-t^2} dt$  si calcola per parti o per sostituzione ed è

$\int \sqrt{1-t^2} dt = \frac{1}{2} [\arcsin t + t\sqrt{1-t^2}]$  per cui  $f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{1-t^2} dt = \frac{1}{2} [\arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x}\sqrt{1-x}]$ . La derivata

$$\text{è } f'(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1-2x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1+1-2x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \right] = \left[ \frac{1-x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \right] = \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

**Quesito 6**

**Determinare il dominio di continuità e quello di derivabilità della funzione  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$**

La funzione  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$  è definita e continua in tutto  $\mathbb{R}$ . La sua derivata è  $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$  che è

definita in  $\mathbb{R}/\{0\}$ . Inoltre  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \right) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \right) = -\infty$  per cui  $x = 0$  è ascissa di cuspide con

vertice in basso.

**Quesito 7**

**Enunciare il teorema di De L'Hôpital e stabilire se può essere applicato per calcolare i seguenti limiti:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 3x}{\sin x + 2x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + 3x}{\sin x + 2x}$$

Enunciamo la regola di de L' Hôpital :

Se due funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  definite in un intorno di  $+\infty$  ( $0$ ), sono derivabili in tale intorno, con  $g'(x) \neq 0$ ; se le due funzioni, per  $x \rightarrow +\infty$  ( $x \rightarrow 0$ ) tendono entrambe a 0 o a  $\infty$  e se esiste il limite

del rapporto delle derivate delle funzioni date,  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ , allora esiste anche il limite del rapporto delle

funzioni  $\frac{f(x)}{g(x)}$  e vale  $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow 0)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow 0)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

In virtù di tale definizione, il limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 3x}{\sin x + 2x}$  può essere calcolato con la regola di de L' Hôpital

e vale  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 3}{\cos x + 2} = \frac{4}{3}$  mentre il limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + 3x}{\sin x + 2x}$  non può essere calcolato con la regola di de

L' Hôpital in quanto il limite del rapporto tra le derivate,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x + 3}{\cos x + 2}$ , non esiste. Venendo a

cadere una delle ipotesi del teorema, ne deduciamo la sua inapplicabilità per il limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + 3x}{\sin x + 2x}$ .

Tuttavia il limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + 3x}{\sin x + 2x}$  ha un valore finito: infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + 3x}{\sin x + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sin x}{x} + 3}{\frac{\sin x}{x} + 2} \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 0} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + 3x}{\sin x + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sin x}{x} + 3}{\frac{\sin x}{x} + 2} = \frac{3}{2}.$$