

(Buenos Aires - Lima)NUOVO ESAME DI STATO: Indirizzo **Scientifico****Sessione 2002** (suppletiva)

SECONDA PROVA SCRITTA

Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario:

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la parabola p di equazione:

$$y = x^2 + x + 1$$

- a) Condotte per il punto O le rette tangenti alla parabola, trovare le coordinate dei punti A e B di contatto.
- b) Trovare le coordinate del punto C , situato da parte opposta di O rispetto alla retta AB , tale che il triangolo ABC sia isoscele e rettangolo in C .
- c) Determinare l'equazione della circonferenza k avente il centro in C e passante per A .
- d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco AB di parabola e dai segmenti CA e CB .
- e) Determinare in quante parti la parabola p divide il cerchio delimitato da k .

PROBLEMA 2

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = -x^3 + mx^2 - m + 3,$$

dove m è un parametro reale.

- a) Dimostrare che le curve hanno due punti in comune.
- b) Determinare, tra le curve assegnate, la curva γ avente un flesso nel punto di ascissa 1.
- c) Per il punto A , di ascissa $\frac{1}{2}$ condurre le due rette tangenti a γ e indicare con B e C ($x_B > x_C$) i punti che tali rette tangenti hanno in comune con γ , oltre al punto A .
- d) Sull'arco AB di γ trovare un punto P in modo che l'area del triangolo APB sia massima.
- e) Calcolare la tangente dell'angolo formato dalle due suddette rette tangenti a γ .

QUESTIONARIO

1. Una piramide si dice retta:

- A) se gli spigoli che concorrono nel suo vertice propriamente detto sono due a due perpendicolari;
- B) se almeno un angolo del poligono di base è retto;
- C) se l'altezza è perpendicolare alla base;
- D) per una ragione diversa dalle precedenti.

Una sola risposta è corretta: individuarla.

2. Calcolare il volume di un ottaedro regolare, conoscendo la lunghezza s di un suo spigolo.

3. La cifra delle unità dello sviluppo della potenza 2^{2002} è:

A) 2 ; B) 4 ; C) 6 ; D) 8 .

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

4. Considerata la seguente equazione in x :

$$2x^2 - 4x - 3 = 0$$

e indicate con x' ed x'' le sue soluzioni, calcolare il valore della seguente espressione:

$$(x'^2 + x''^2)^3 + (x'^2 \cdot x''^2)^3 - (x' + x'') - (x' \cdot x'')$$

5. Calcolare la derivata, rispetto ad x , della funzione $f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{1-t^2} dt$

6. Determinare il dominio di continuità e quello di derivabilità della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

7. Enunciare il teorema di De L'Hôpital e stabilire se può essere applicato per calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 3x}{\sin x + 2x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + 3x}{\sin x + 2x}$$

· Durata della prova: 6 ore.

· Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

· È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la parabola p di equazione:

$$y = x^2 + x + 1$$

Punto 1

Condotte per il punto O le rette tangenti alla parabola, trovare le coordinate dei punti A e B di contatto.

La generica retta tangente ha equazione $y = mx$. Imponendo l'intersezione tra la retta e la parabola otteniamo l'equazione $x^2 - (m-1)x + 1 = 0$ e imponendo che il delta sia nullo si ha $\Delta = (m-1)^2 - 4 = m^2 - 2m - 3 = (m-3)(m+1) = 0 \Rightarrow m_1 = 3 \vee m_2 = -1$ per cui le due rette tangenti sono $y = 3x$ e $y = -x$. Il punto di contatto A si trova intersecando la parabola con $y = 3x$; in questo caso otteniamo l'equazione $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$ per cui $A = (1,3)$. Il punto di contatto B si trova intersecando la parabola con $y = -x$; in questo caso otteniamo l'equazione $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$ per cui $B = (-1,1)$.

Punto 2

Trovare le coordinate del punto C, situato da parte opposta di O rispetto alla retta AB, tale che il triangolo ABC sia isoscele e rettangolo in C.

Sia C di coordinate generiche $C = (x, y)$. I lati del triangolo ABC misurano:

$$\overline{AC} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(1+1)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2}$$

Il triangolo è isoscele, per cui imponendo $\overline{AC} = \overline{BC}$ si ha

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2} \xrightarrow[\text{ambo i membri}]{\text{Elevando al quadrato}} x + y - 2 = 0; \text{ il triangolo è}$$

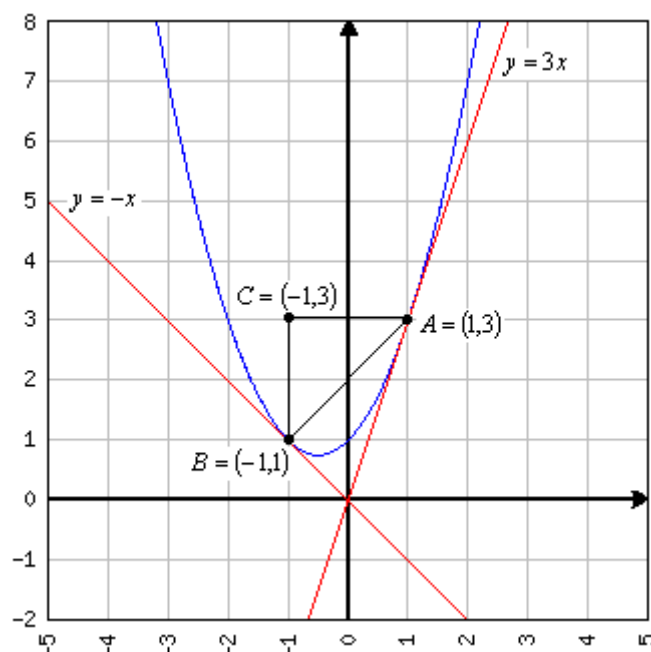
rettangolo in C per cui imponendo $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$ si ha

$$(x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10) + (x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2) = 8 \rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0. \text{ Bisogna risolvere il}$$

sistema
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}.$$
 Sostituendo la seconda nella prima si ha

$$(2-y)^2 + y^2 - 4y + 2 = 0 \Rightarrow y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow y_1 = 1 \vee y_2 = 3 \text{ da cui } x_1 = 1 \vee x_2 = -1. \text{ I punti}$$

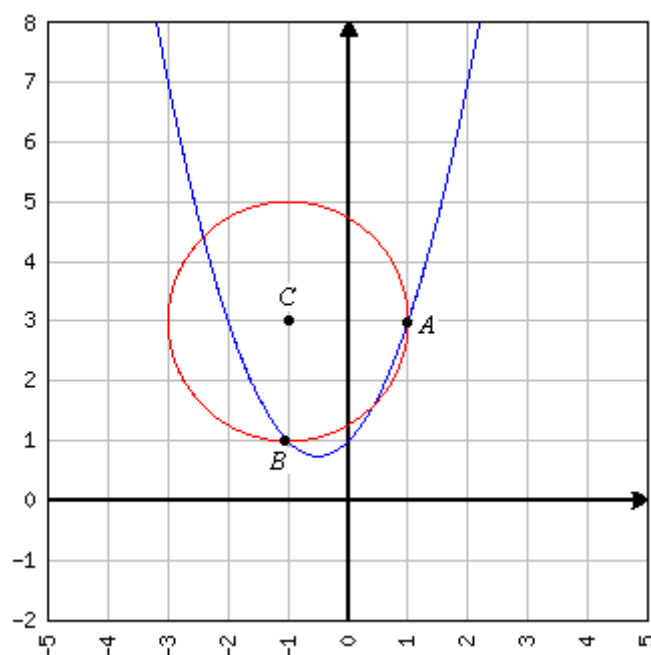
possibili sono allora $C_1 = (1,1), C_2 = (-1,3)$. Poichè C deve essere situato da parte opposta di O rispetto alla retta AB allora $C \equiv C_2 = (-1,3)$. Il grafico sottostante rappresenta quanto trovato.



Punto 3

Determinare l'equazione della circonferenza k avente il centro in C e passante per A .

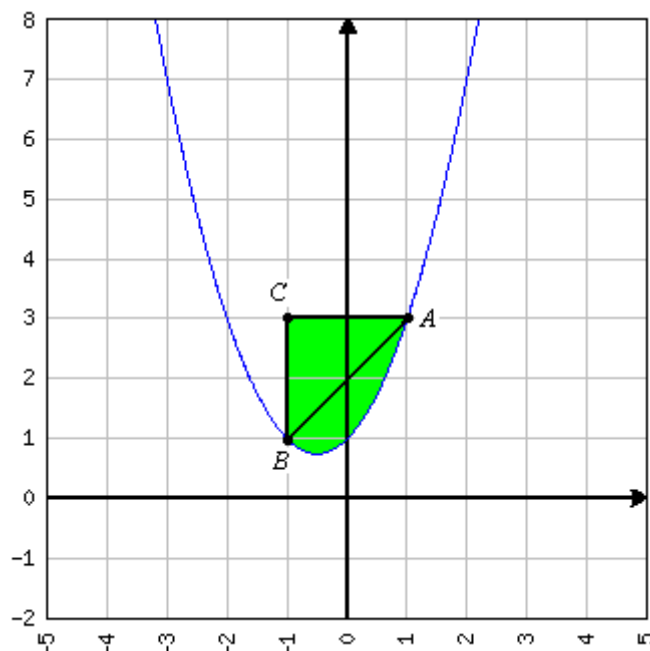
Il raggio della circonferenza è $\overline{AC} = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-3)^2} = 2$ per cui l'equazione della circonferenza è $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$. Poichè $\overline{AC} = \overline{CB}$ la circonferenza passerà anche per $B = (-1, 1)$.



Punto 4

Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco AB di parabola e dai segmenti CA e CB.

L'area da calcolare è rappresentata in verde nella figura sottostante:



La retta AB ha equazione $\frac{y-3}{1-3} = \frac{x-1}{-1-1} \Rightarrow y = x + 2$.

Il triangolo ABC ha area $S_{ABC} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{CB}}{2} = 2$ mentre l'area sottesa dal segmento AB con la parabola

$$\text{è } S_{AB/p} = \int_{-1}^1 (x+2 - x^2 - x - 1) dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = 2 \int_0^1 (1 - x^2) dx = 2 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3} \quad \text{per cui l'area}$$

$$\text{richiesta è } S = S_{ABC} + S_{AB/p} = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}.$$

Punto 5

Determinare in quante parti la parabola p divide il cerchio delimitato da k

Calcoliamo le intersezioni della parabola con la circonferenza. Bisogna risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0 \\ y = x^2 + x + 1 \end{cases}$$

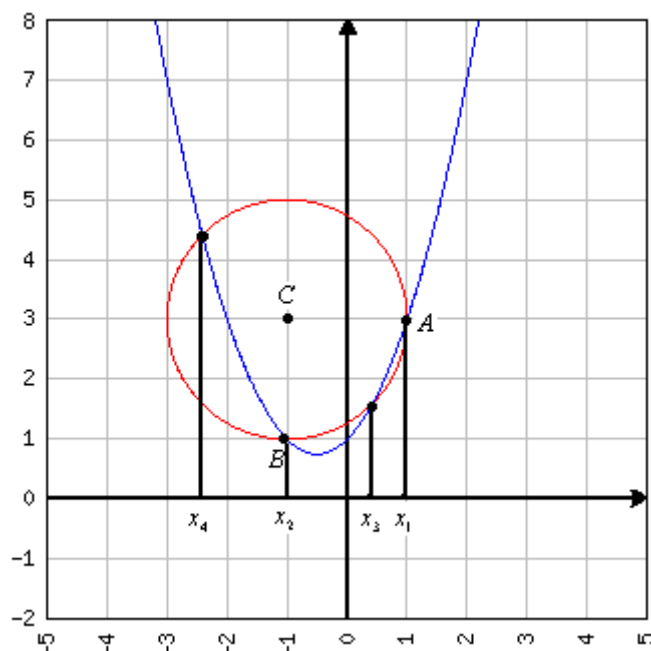
Sostituendo la seconda nella prima si ottiene l'equazione $x^2 + (x^2 + x + 1)^2 + 2x - 6(x^2 + x + 1) + 6 = 0$

da cui $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$.

Raggruppando si ha:

$$\begin{aligned}(x^4 - 2x^2 + 1) + (2x^3 - 2x) &= 0 \Rightarrow (x^2 - 1)^2 + 2x(x^2 - 1) = \\ &= (x^2 - 1)(x^2 + 2x - 1) = (x^2 - 1)(x + 1 - \sqrt{2})(x + \sqrt{2} + 1) = 0 \Rightarrow \\ x_1 &= 1, x_2 = -1, x_3 = (\sqrt{2} - 1), x_4 = (-\sqrt{2} - 1)\end{aligned}$$

La figura sottostante rappresenta le 4 intersezioni tra parabola e circonferenza:



In conclusione la parabola suddivide la circonferenza in 4 parti.

PROBLEMA 2

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = -x^3 + mx^2 - m + 3,$$

dove m è un parametro reale.

Punto 1

Dimostrare che le curve hanno due punti in comune.

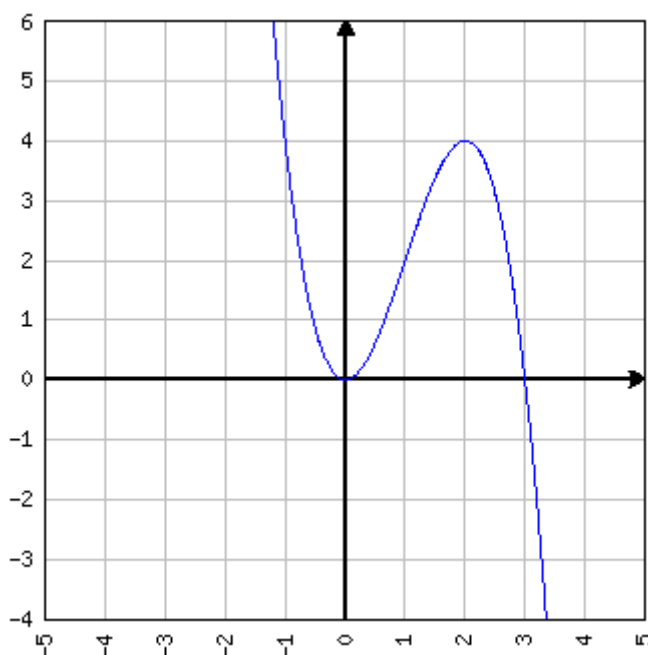
La cubica può essere scritta come $y = -x^3 + 3 + m(x^2 - 1)$ per cui i punti base di essa si possono

trovare risolvendo il sistema $\begin{cases} (x^2 - 1) = 0 \\ y = -x^3 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 4 \end{cases}$

Punto 2

Determinare, tra le curve assegnate, la curva γ avente un flesso nel punto di ascissa 1.

La derivata seconda della cubica è $y'' = -6x + 2m$. Essa ha un flesso nel punto di ascissa 1 se $y''(1) = -6 + 2m = 0 \Rightarrow m = 3$. Quindi $\gamma: y = -x^3 + 3x^2$. Tale curva è definita su tutto \mathbb{R} , interseca l'asse delle ascisse in $(0,0)$ e $(3,0)$ e quello delle ordinate in $(0,0)$, è positiva o nulla in $(-\infty, 3)$, non presenta asintoti ed è strettamente crescente in $(0,2)$ e strettamente decrescente in $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ per cui presenta un minimo relativo in $(0,0)$ e un massimo relativo in $(2,4)$. Presenta inoltre il sopracitato flesso a tangente obliqua in $(1,2)$. Il grafico di seguito.



Punto 3

Per il punto A, di ascissa $\frac{1}{2}$ condurre le due rette tangenti a γ e indicare con B e C ($x_B > x_C$) i punti che tali rette tangenti hanno in comune con γ , oltre al punto A.

Il punto A è $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right)$. Una prima retta tangente è quella tangente alla cubica in A ed essa ha

equazione $y = m\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{8}$ con $m = y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$ per cui la prima tangente ha equazione

$y = \frac{9}{4}x - \frac{1}{2}$. Troviamo i punti di intersezione tra la cubica $\gamma: y = -x^3 + 3x^2$ e la tangente

$y = \frac{9}{4}x - \frac{1}{2}$: intersecandole si ha l'equazione risolvente

$$4x^3 - 12x^2 + 9x - 2 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2(x - 2) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = 2.$$

L'altra retta tangente ha equazione generica $y = m\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{8}$. Intersechiamo tale retta con la cubica

e otteniamo l'equazione risolvente $x^3 - 3x^2 + mx - \frac{m}{2} + \frac{5}{8} = 0$. Un divisore di

$\left(x^3 - 3x^2 + mx - \frac{m}{2} + \frac{5}{8}\right)$ è sicuramente $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ dal momento che sia la retta che la cubica hanno in

comune il punto di ascissa $\frac{1}{2}$; il polinomio $\left(x^3 - 3x^2 + mx - \frac{m}{2} + \frac{5}{8}\right)$ allora è scomponibile come

$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{5x}{2} + m - \frac{5}{4}\right)$ per cui l'equazione risolvente diventa $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{5x}{2} + m - \frac{5}{4}\right) = 0$. Per

ottenere la retta tangente dobbiamo imporre che il delta dell'equazione di secondo grado

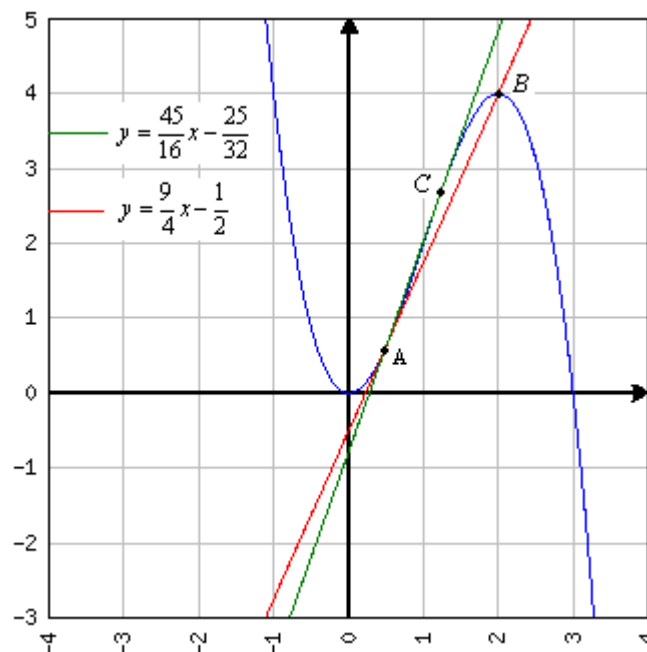
$\left(x^2 - \frac{5x}{2} + m - \frac{5}{4}\right) = 0$ sia nullo e ciò avviene se $\Delta = \frac{25}{4} - 4\left(m - \frac{5}{4}\right) = -4m + \frac{45}{4} = 0 \Rightarrow m = \frac{45}{16}$ per

cui la seconda retta tangente ha equazione $y = \frac{45}{16}x - \frac{25}{32}$. Troviamo i punti di intersezione tra la

cubica $\gamma: y = -x^3 + 3x^2$ e la tangente $y = \frac{45}{16}x - \frac{25}{32}$: intersecandole si ha l'equazione risolvente

$32x^3 - 96x^2 + 90x - 25 = 32\left(x - \frac{5}{4}\right)^2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = \frac{5}{4}$. I punti di intersezione, oltre

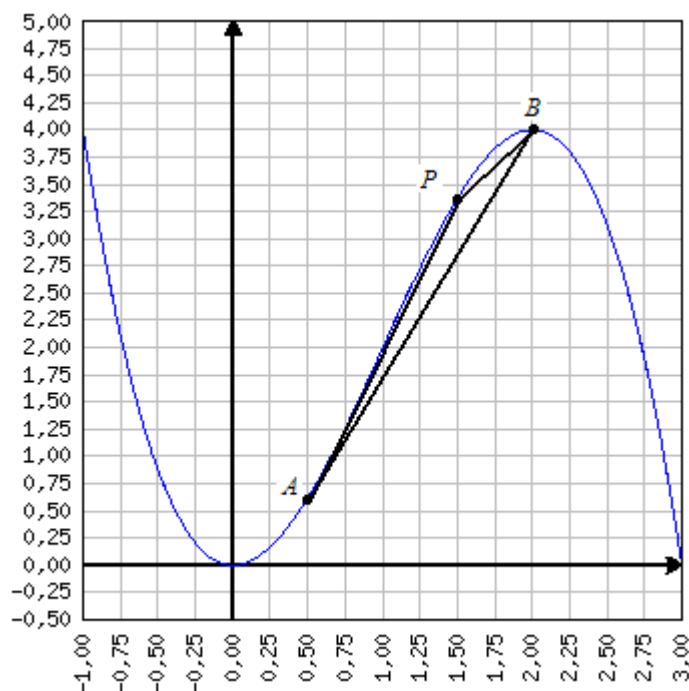
$A = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right)$, sono allora $B = (2, 4)$ e $C = \left(\frac{5}{4}, \frac{175}{64}\right)$. La figura sottostante evidenzia quanto detto.



Punto 4

Sull'arco AB di γ trovare un punto P in modo che l'area del triangolo APB sia massima.

Consideriamo la figura sottostante:



Un punto P generico della cubica appartenente all'arco AB ha coordinate $P = (x, 3x^2 - x^3)$ con

$\frac{1}{2} < x < 2$. La retta AB ha equazione $\frac{y - \frac{5}{8}}{4 - \frac{5}{8}} = \frac{x - \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}} \rightarrow 9x - 4y - 2 = 0$ mentre il segmento AB

misura $\overline{AB} = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{5}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{729}{64}} = \frac{3}{8}\sqrt{97}$. L'altezza del triangolo ABP è la distanza

di $P = (x, 3x^2 - x^3)$ dalla retta $9x - 4y - 2 = 0$ e misura

$$h(x) = \frac{|9x - 4(3x^2 - x^3) - 2|}{\sqrt{97}} = \frac{|4x^3 - 12x^2 + 9x - 2|}{\sqrt{97}} = \frac{|(x-2)(2x-1)^2|}{\sqrt{97}} \xrightarrow{\frac{1}{2} < x < 2} h(x) = \frac{(2-x)(2x-1)^2}{\sqrt{97}}$$

L'area del triangolo ABP è $S(x) = \frac{3\sqrt{97}}{16} h(x) = \frac{3}{16} [(2-x)(2x-1)^2]$ ed è massima quando è massima

l'altezza $h(x)$. La massimizzazione dell'area o dell'altezza $h(x)$ equivale alla massimizzazione della funzione $g(x) = (2-x)(2x-1)^2$. Calcoliamo la derivata prima e seconda della funzione

$g(x) = (2-x)(2x-1)^2$: esse sono rispettivamente $g'(x) = 3(3-2x)(2x-1)$, $g''(x) = 24(1-x)$ per cui

per $\frac{1}{2} < x < 2$ si ha:

$$g'(x) = 3(3-2x)(2x-1) > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

$$g'(x) = 3(3-2x)(2x-1) < 0 \Rightarrow \frac{3}{2} < x < 2$$

$$g'(x) = 3(3-2x)(2x-1) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$g''\left(\frac{3}{2}\right) = 24\left(1 - \frac{3}{2}\right) = -12 < 0$$

Dalle considerazioni soprastanti deduciamo che l'area del triangolo APB è massima per $x = \frac{3}{2}$ cui

corrisponde $P = \left(\frac{3}{2}, \frac{27}{8}\right)$ e l'area massima $S_{MAX} = \frac{3}{16} g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{8}$.

Punto 5

Calcolare la tangente dell'angolo formato dalle due suddette rette tangenti a γ .

L'angolo α tra le due tangenti si ricava dalla formula $\tan(\alpha) = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right| = \left| \frac{\frac{45}{16} - \frac{9}{4}}{1 + \frac{405}{64}} \right| = \frac{36}{469}$.

QUESTIONARIO*Quesito 1*

Una piramide si dice retta:

- A) se gli spigoli che concorrono nel suo vertice propriamente detto sono due a due perpendicolari;**
- B) se almeno un angolo del poligono di base è retto;**
- C) se l'altezza è perpendicolare alla base;**
- D) per una ragione diversa dalle precedenti.**

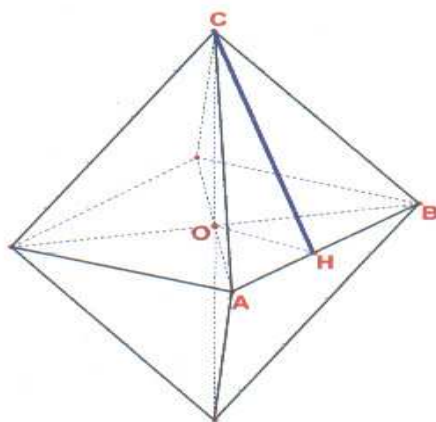
Una sola risposta è corretta: individuarla.

Una piramide si dice retta se il poligono di base è circoscrittibile ad una circonferenza e il piede dell'altezza coincide con il centro di questa circonferenza. Ecco per cui la risposta corretta è la D.

Quesito 2

Calcolare il volume di un ottaedro regolare, conoscendo la lunghezza s di un suo spigolo.

In geometria solida, l'ottaedro è un poliedro con otto facce triangolari. L'ottaedro regolare è uno dei cinque solidi platonici, le cui facce sono triangoli equilateri. Ha sei vertici e dodici spigoli. La figura seguente mostra l'ottaedro regolare.



Il volume dell'ottaedro è il doppio del volume della piramide a base quadrata di area s^2 ed altezza \overline{CO} . Poiché le facce son triangoli equilateri si ha $\overline{CH} = \frac{s\sqrt{3}}{2}$ mentre $\overline{OH} = \frac{s}{2}$ per cui

$$\overline{CO} = \sqrt{\left(\frac{s\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \frac{s\sqrt{2}}{2} \quad \text{per cui il volume dell'ottaedro è}$$

$$V = 2 \left(\frac{A_{BASE} \cdot \overline{CO}}{3} \right) = 2 \left(\frac{s^2}{3} \cdot \frac{s\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{s^3 \sqrt{2}}{3}.$$

Quesito 3

La cifra delle unità dello sviluppo della potenza 2^{2002} è:

A) 2 ; B) 4 ; C) 6 ; D) 8 .

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

Le cifre delle unità delle potenze di 2 si ripetono periodicamente con periodo $T = 4$ e sono $\{2, 4, 8, 6\}$;

infatti basti pensare alle prime 8 potenze: $\left\{ \underbrace{2, 4, 8, 16}_{T=4}, \underbrace{32, 64, 128, 256}_{T=4} \right\}$. Ora $2^{2002} = 2^{2000} \cdot 2^2$ e poichè

2000 è divisibile per 4 allora 2^{2000} sarà un numero che ha la cifra dell'unità pari a 6 per cui $2^{2002} = 2^{2000} \cdot 2^2 = 2^{2000} \cdot 4$ avrà la cifra dell'unità pari a 4. Quindi la risposta corretta è la B.

Quesito 4

Considerata la seguente equazione in x :

$$2x^2 - 4x - 3 = 0$$

e indicate con x' ed x'' le sue soluzioni, calcolare il valore della seguente espressione:

$$(x'^2 + x''^2)^3 + (x'^2 \cdot x''^2)^3 - (x' + x'') - (x' \cdot x'')$$

Le soluzioni di $2x^2 - 4x - 3 = 0$ sono le soluzioni di $x^2 - 2x - \frac{3}{2} = 0$; quindi la somma delle

soluzioni sarà $(x' + x'') = 2$ e il prodotto sarà $(x' \cdot x'') = -\frac{3}{2}$. L'espressione da calcolare diventa allora:

$$\begin{aligned} (x'^2 + x''^2)^3 + (x'^2 \cdot x''^2)^3 - (x' + x'') - (x' \cdot x'') &= \left[(x' + x'')^2 - 2(x' \cdot x'') \right]^3 + (x' \cdot x'')^6 - (x' + x'') - (x' \cdot x'') = \\ &= \left[(2)^2 - 2\left(-\frac{3}{2}\right) \right]^3 + \left(-\frac{3}{2}\right)^6 - (2) - \left(-\frac{3}{2}\right) = 7^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^6 - 2 + \frac{3}{2} = 343 + \frac{729}{64} - \frac{1}{2} = \frac{22649}{64}. \end{aligned}$$

Quesito 5

Calcolare la derivata, rispetto ad x , della funzione $f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{1-t^2} dt$

La derivata di $f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{1-t^2} dt$, applicando il teorema della derivata di una funzione integrale, è

$$f'(x) = \frac{d(\sqrt{x})}{dx} \cdot \left[\sqrt{1-t^2} \right]_{t=\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sqrt{1-x} = \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-x}{x}}. \quad \text{Procediamo anche tramite}$$

risoluzione diretta dell'integrale. L'integrale $\int \sqrt{1-t^2} dt$ si calcola per parti o per sostituzione ed è

$\int \sqrt{1-t^2} dt = \frac{1}{2} [\arcsin t + t\sqrt{1-t^2}]$ per cui $f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{1-t^2} dt = \frac{1}{2} [\arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x}\sqrt{1-x}]$. La derivata

$$\text{è } f'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1-2x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1+1-2x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \right] = \left[\frac{1-x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \right] = \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

Quesito 6

Determinare il dominio di continuità e quello di derivabilità della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ è definita e continua in tutto \mathbb{R} . La sua derivata è $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ che è

definita in $\mathbb{R}/\{0\}$. Inoltre $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \right) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \right) = -\infty$ per cui $x = 0$ è ascissa di cuspide con

vertice in basso.

Quesito 7

Enunciare il teorema di De L'Hôpital e stabilire se può essere applicato per calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 3x}{\sin x + 2x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + 3x}{\sin x + 2x}$$

Enunciamo la regola di de L' Hôpital :

Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite in un intorno di $+\infty$ (0), sono derivabili in tale intorno, con $g'(x) \neq 0$; se le due funzioni, per $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow 0$) tendono entrambe a 0 o a ∞ e se esiste il limite

del rapporto delle derivate delle funzioni date, $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora esiste anche il limite del rapporto delle

funzioni $\frac{f(x)}{g(x)}$ e vale $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow 0)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow 0)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

In virtù di tale definizione, il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 3x}{\sin x + 2x}$ può essere calcolato con la regola di de L' Hôpital

e vale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 3}{\cos x + 2} = \frac{4}{3}$ mentre il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + 3x}{\sin x + 2x}$ non può essere calcolato con la regola di de

L' Hôpital in quanto il limite del rapporto tra le derivate, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x + 3}{\cos x + 2}$, non esiste. Venendo a

cadere una delle ipotesi del teorema, ne deduciamo la sua inapplicabilità per il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + 3x}{\sin x + 2x}$.

Tuttavia il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + 3x}{\sin x + 2x}$ ha un valore finito: infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + 3x}{\sin x + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sin x}{x} + 3}{\frac{\sin x}{x} + 2} \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 0} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + 3x}{\sin x + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sin x}{x} + 3}{\frac{\sin x}{x} + 2} = \frac{3}{2}.$$