SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO
ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Sessione Ordinaria 2003
Calendario australe
SECONDA PROVA SCRITTA
Tema di Matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Considerate le funzioni

$$f(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad g(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

1. Tracciate nel piano (t; y) i loro rispettivi grafici F e G.
2. Provate che un punto qualsiasi dell'iperbole $x^2 - y^2 = 1$ avente per ascissa $f(t_1)$ ha per ordinata $g(t_1)$.
3. Siano P e Q i punti rispettivamente di F e G aventi la medesima ascissa t_0. Stabilite se la distanza tra P e Q assume un valore di minimo o di massimo assoluto per qualche particolare valore di t_0.
4. Calcolate l'area della regione limitata da F, G, dall'asse y e dalla retta di equazione $t = -1$ e quella della regione limitata da F, G, dall'asse y e dalla retta di equazione $t = 1$.

PROBLEMA 2

Determinare b e c affinché la parabola di equazione $y = -x^2 + bx + c$ abbia il vertice in A(1; 6). Determinare altresì il parametro k in modo che l'iperbole di equazione $xy = k$ passi per A.

1. Disegnare le due curve e determinare le coordinate dei loro ulteriori punti comuni indicando con B quello appartenente al primo quadrante.
2. Calcolare l'area della parte di piano limitata dai due archi AB della parabola e dell'iperbole.
3. Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione completa, attorno all'asse y della medesima parte di piano.

QUESTIONARIO

1. Cosa si intende per funzione periodica ? Quale è il Periodo della funzione $f(x) = \tan(2x) + \cos(2x)$?

2. Provate che se l'equazione $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ha due soluzioni entrambe di valore k, allora k è anche soluzione dell'equazione $3ax^2 + 2bx + c = 0$.

3 Provate che la curva di equazione

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n}$$

con a_0 e b_0 reali non nulli, ammette per asintoto la retta di equazione $y = \frac{a_0}{b_0}$

4. Quale è il flesso della funzione $e^x - x^2$?

5. Provate che una qualsiasi curva di equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ presenta uno e un solo flesso e che questo è il centro di simmetria della curva.

6. Per quale x la tangente alla curva di equazione $y = \arcsin x$ ha coefficiente angolare 1?

7. F(x) e G(x) sono due primitive rispettivamente di $y = x^2$ e $y = x$. Sapendo che è $G(0) - F(0) = 3$, quanto vale $G(1) - F(1)$?

8. Tra i coni circolari retti di apotema 3 dm quale è quello di capacità massima? Esprimete in litri tale capacità massima.

Durata massima della prova : 6 ore

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

E' consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.

PROBLEMA 1

Considerate le funzioni

$$f(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}, \quad g(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

Punto 1

Tracciate nel piano (t; y) i loro rispettivi grafici F e G.

Studiamo la funzione $f(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$

- *Dominio:* R;
- *Intersezioni asse ascisse:* non ve ne sono;
- *Intersezioni asse ordinate:* $t=0 \Rightarrow y=1$;
- *Positività:* $f(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}>0 \Rightarrow \forall t \in R$
- *Asintoti verticali:* non ve ne sono;
- *Asintoti orizzontali:* non ve ne sono in quanto $\lim_{t\to\pm\infty}\frac{e^t+e^{-t}}{2}=+\infty$;
- *Asintoti obliqui:* non ve ne sono in quanto $\lim_{t\to\pm\infty}\frac{e^t+e^{-t}}{2t}\overset{\text{De L'Hospital}}{=}\lim_{t\to\pm\infty}\frac{e^t-e^{-t}}{2}=\pm\infty$;
- *Crescenza e decrescenza:* la derivata prima della funzione è: $f'(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$ per cui $f'(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}>0 \Rightarrow e^t>e^{-t} \Rightarrow t>-t \Rightarrow t>0$ per cui la funzione è strettamente crescente in $(0,+\infty)$ e strettamente decrescente altrove.
- *Concavità e convessità:* la derivata seconda è $f''(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}>0 \Rightarrow \forall t \in R$ per cui la funzione presenta sempre concavità verso l'alto. Inoltre $y''(0)=1>0$ per cui $(0,1)$ è un minimo relativo ed assoluto.

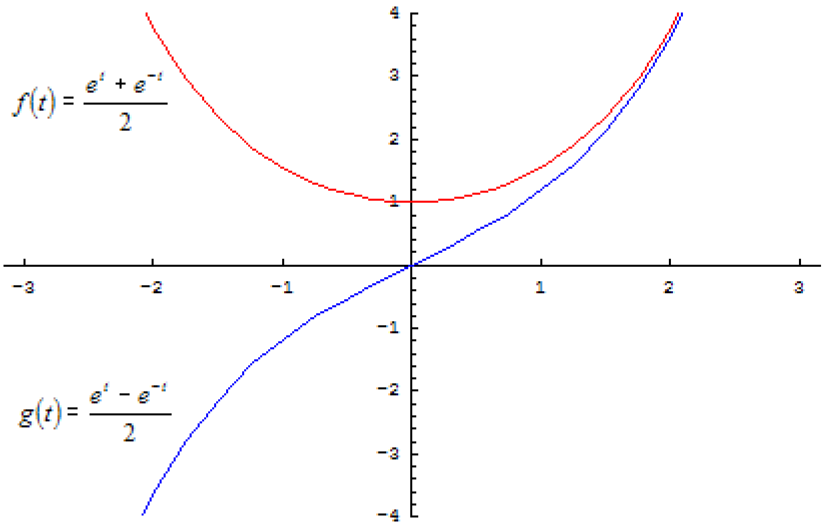
Studiamo la funzione $g(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$

- *Dominio:* R;
- *Intersezioni asse ascisse:* $g(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}=0 \Rightarrow e^t=e^{-t} \Rightarrow t=-t \Rightarrow t=0$;

- *Intersezioni asse ordinate:* $t = 0 \Rightarrow y = 0$;
- *Positività:* $g(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} > 0 \Rightarrow e^t > e^{-t} \Rightarrow t > -t \Rightarrow t > 0$
- *Asintoti verticali:* non ve ne sono;
- *Asintoti orizzontali:* non ve ne sono in quanto $\lim_{t \to \pm\infty} \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \pm\infty$;
- *Asintoti obliqui:* non ve ne sono in quanto $\lim_{t \to \pm\infty} \frac{e^t - e^{-t}}{2t} \overset{\substack{De \\ L'Hospital}}{=} \lim_{t \to \pm\infty} \frac{e^t + e^{-t}}{2} = +\infty$;
- *Crescenza e decrescenza:* la derivata prima della funzione è: $g'(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ per cui la funzione è strettamente crescente in tutto R.
- *Concavità e convessità:* la derivata seconda è $g''(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} > 0 \Rightarrow e^t > e^{-t} \Rightarrow t > -t \Rightarrow t > 0$ per cui la funzione presenta concavità verso l'alto in $(0,+\infty)$. Inoltre per cui $(0,0)$ è un flesso a tangente obliqua.

Notiamo che la curva $g(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ non è altro che la derivate prima di $f(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ ed inoltre non si intersecano mai in quanto $\frac{e^t + e^{-t}}{2} = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \Rightarrow e^{-t} = 0$ e quest'ultima equazione non presenta soluzioni reali.

Di seguito vengono presentati i due grafici in un unico riferimento cartesiano:



Punto 2

Provate che un punto qualsiasi dell'iperbole $x^2 - y^2 = 1$ avente per ascissa $f(t_1)$ ha per ordinata $g(t_1)$.

Un primo modo per dimostrare che la coppia $(f(t_1), g(t_1))$ è un punto dell'iperbole, basta sostituire l'ascissa $f(t_1)$ e l'ordinata $g(t_1)$ e controllare che ricaviamo una identità. In questo modo si ha $\left(\frac{e^{t_1}+e^{-t_1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{t_1}-e^{-t_1}}{2}\right)^2 = \left(\frac{e^{2t_1}+e^{-2t_1}+2}{4}\right) - \left(\frac{e^{2t_1}+e^{-2t_1}-2}{4}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$ come volevamo dimostrare. Un altro modo di proseguire è il seguente. Siano $\begin{cases} x = f(t_1) = \left(\frac{e^{t_1}+e^{-t_1}}{2}\right) \\ y = g(t_1) = \left(\frac{e^{t_1}-e^{-t_1}}{2}\right) \end{cases}$. Sommando e sottraendo membro a membro le due espressioni, si ottiene: $\begin{cases} x+y = e^{t_1} \\ x-y = e^{-t_1} \end{cases}$ e moltiplicando membro a membro otteniamo $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2 = 1$.

Punto 3

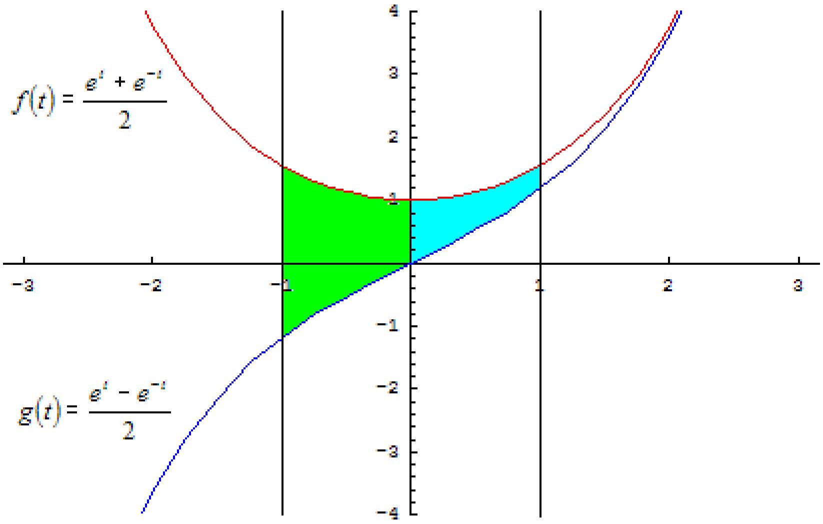
Siano P e Q i punti rispettivamente di F e G aventi la medesima ascissa t_0. Stabilite se la distanza tra P e Q assume un valore di minimo o di massimo assoluto per qualche particolare valore di t_0.

I punti P e Q hanno coordinate $P\left(t_0, \frac{e^{t_0}+e^{-t_0}}{2}\right), Q\left(t_0, \frac{e^{t_0}-e^{-t_0}}{2}\right)$ e la distanza tra essi è pari a $d(t_0) = |y_P - y_Q| = \left|\left(\frac{e^{t_0}+e^{-t_0}}{2}\right) - \left(\frac{e^{t_0}-e^{-t_0}}{2}\right)\right| = \left|e^{-t_0}\right| = e^{-t_0}$. La funzione distanza è la funzione esponenziale con esponente negativo, è sempre positiva ed assume valore di minimo assoluto quando $t_0 \to +\infty$ e il minimo assoluto vale $d(+\infty) = 0$ ed assume valore di massimo assoluto quando $t_0 \to -\infty$ e il massimo assoluto vale $d(-\infty) = +\infty$.

Punto 4

Calcolate l'area della regione limitata da F, G, dall'asse y e dalla retta di equazione $t = -1$ e quella della regione limitata da F, G, dall'asse y e dalla retta di equazione $t = 1$.

Le aree da calcolare sono di seguito raffigurate in verde e celeste:



L'area in verde è $S_1 = \int_{-1}^{0} \left[\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right) - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right) \right] dt = \int_{-1}^{0} e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_{-1}^{0} = e - 1$, mentre quella in celeste è $S_2 = \int_{0}^{1} \left[\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right) - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right) \right] dt = \int_{0}^{1} e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_{0}^{1} = 1 - e^{-1} = \frac{e-1}{e}$.

PROBLEMA 2

Determinare b e c affinché la parabola di equazione $y=-x^2+bx+c$ abbia il vertice in A(1; 6). Determinare altresì il parametro k in modo che l'iperbole di equazione $xy=k$ passi per A.

L'ascissa del vertice è $x_V=-\frac{b}{2a}=\frac{b}{2}$ ed imponendo $x_V=\frac{b}{2}=1$ ricaviamo $b=2$. Imponendo il passaggio per A(1,6) si ricava $b+c=7$ da cui $c=7-b=7-2=5$. L'equazione della parabola è allora $y=-x^2+2x+5$. Affinché l'iperbole equilatera di equazione $xy=k$ passi per A(1,6) si deve imporre $k=6$ cui corrisponde l'equazione $xy=6$.

Punto 1

Disegnare le due curve e determinare le coordinate dei loro ulteriori punti comuni indicando con B quello appartenente al primo quadrante.

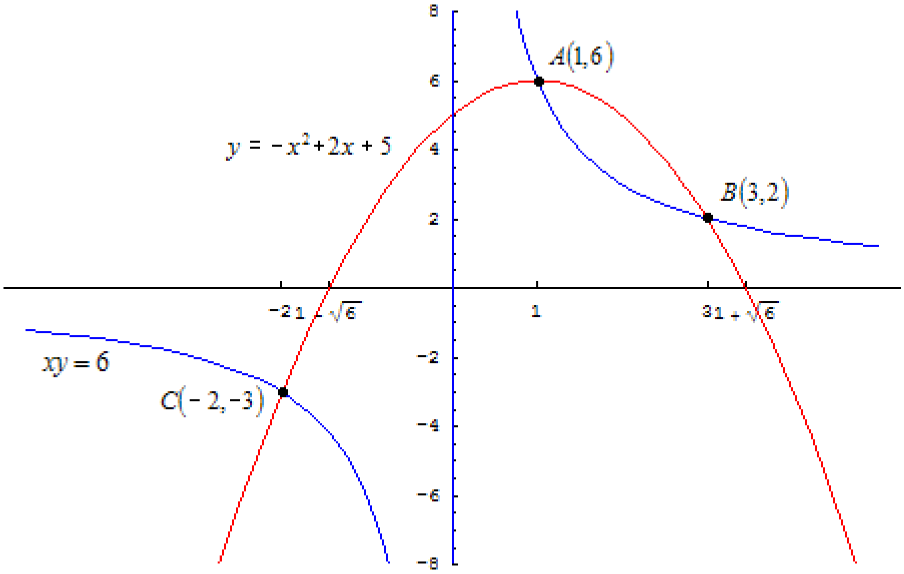
La parabola $y=-x^2+2x+5$ ha vertice in A(1,6), concavità verso il basso ed interseca l'asse delle ascisse in $(1+\sqrt{6},0),(1-\sqrt{6},0)$ e quello delle ordinate in $(0,5)$.

L'iperbole equilatera $xy=6$ è definita in $R/\{0\}$, positiva in $(0,+\infty)$, e presenta $x=0$ come asintoto verticale e $y=0$ come asintoto orizzontale. E' strettamente decrescente per cui non presenta estremi relativi e non presenta flessi.

Le intersezioni tra le due curve si ricavano risolvendo l'equazione

$$-x^2+2x+5=\frac{6}{x}\Rightarrow x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x+2)(x-3)=0\Rightarrow \left\| \begin{array}{l} A(1,6) \\ B(3,2) \\ C(-2,-3) \end{array} \right.$$

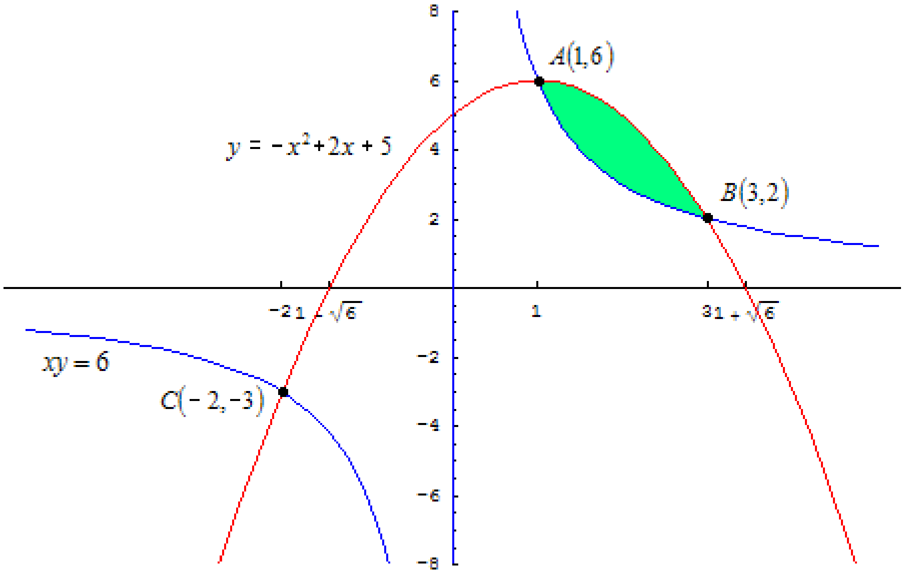
Il grafico di seguito.



Punto 2

Calcolare l'area della parte di piano limitata dai due archi AB della parabola e dell'iperbole.

L'area è raffigurata in verde:



Tale area vale:

$$S = \int_1^3 \left[\left(-x^2+2x+5\right) - \left(\frac{6}{x}\right) \right] dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 5x - 6\ln|x| \right]_1^3 =$$

$$= [-9+9+15-6\ln 3] - \left[-\frac{1}{3} + 1 + 5 \right] = \frac{28 - 18\ln 3}{3}$$

Punto 3

Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione completa, attorno all'asse y della medesima parte di piano.

L'arco di parabola AB del primo quadrante è rappresentabile come $x = 1 + \sqrt{6-y}$ per cui il volume vale:

$$S = \pi \int_2^6 \left[\left(1+\sqrt{6-y}\right)^2 - \left(\frac{6}{y}\right)^2 \right] dy = \pi \int_2^6 \left(7 - y + 2\sqrt{6-y} - \frac{36}{y^2} \right) dy =$$

$$= \pi \left[-\frac{(y-7)^2}{2} - \frac{4}{3}(6-y)^{\frac{3}{2}} + \frac{36}{y} \right]_2^6 = \pi \left[\left(-\frac{1}{2} + 6 \right) - \left(-\frac{25}{2} - \frac{32}{3} + 18 \right) \right] = \pi \left(\frac{11}{2} + \frac{31}{6} \right) = \frac{32\pi}{3}$$

QUESTIONARIO

Quesito 1

Cosa si intende per funzione periodica ? Quale è il Periodo della funzione $f(x) = \tan(2x) + \cos(2x)$?

Una funzione reale di variabile reale $y = f(x)$ si dice periodica di periodo *T*, con $T > 0$, se, per qualsiasi numero *k* intero, si ha: $f(x) = f(x + kT)$ per ogni *x* del dominio di *f*. La somma di funzioni periodiche ha come periodo il *m.c.m.* dei periodi delle singole funzioni.

Nel caso in esame il periodo della funzione $f_1(x) = \tan(2x)$ è $T_1 = \frac{\pi}{2}$ mentre il periodo di $f_2(x) = \cos(2x)$ è $T_2 = \pi$ per cui il periodo di $f(x) = \tan(2x) + \cos(2x)$ è $T = m.c.m(T_1, T_2) = m.c.m\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = \pi$.

Quesito 2

Provate che se l'equazione $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ha due soluzioni entrambe di valore k, allora k è anche soluzione dell'equazione $3ax^2 + 2bx + c = 0$.

Se l'equazione $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ha due soluzioni entrambe di valore k, essa è esprimibile come $a(x-k)^2(x+m) = 0$ con a, b, c, d, k, m tali che $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-k)^2(x+m)$. La funzione $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-k)^2(x+m)$ ha come derivata prima $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 2a(x-k)(x+m) + a(x-k)^2 = a(x-k)(3x + 2m - k)$ e si annulla anch'essa per $x = k$ come volevasi dimostrare.

Quesito 3

Provate che la curva di equazione

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n}$$

con a_0 e b_0 reali non nulli, ammette per asintoto la retta di equazione $y = \frac{a_0}{b_0}$

Dobbiamo provare che la retta $y = \frac{a_0}{b_0}$ è asintoto orizzontale per la curva $y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n}$, e quindi che $\lim_{x \to \pm\infty}\left(\frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n}\right) = \frac{a_0}{b_0}$. La curva $y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n}$ può essere scritta equivalentemente nel modo seguente

$$y=\frac{x^n\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n}\right)}{x^n\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{b_n}{x^n}\right)}=\frac{\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n}\right)}{\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{b_n}{x^n}\right)}$$ per cui

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n}\right)}{\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{b_n}{x^n}\right)}\right].$$ Tutti i termini del tipo

$\frac{a_i}{x^i},\frac{b_i}{x^i}$ con $i=1,2,\cdots,n$ per $x\to\pm\infty$ tendono tutti a 0, per cui

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n}\right)}{\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{b_n}{x^n}\right)}\right]=\frac{a_0}{b_0}.$$

Quesito 4

Quale è il flesso della funzione e^x-x^2?

La derivata prima e seconda di $f(x)=e^x-x^2$ sono $f'(x)=e^x-2x,\ f''(x)=e^x-2$. La derivata seconda si annulla per $x=\ln 2$ e $f'(\ln 2)=2-2\ln 2\neq 0$, quindi il flesso di $f(x)=e^x-x^2$ è a tangente obliqua nel punto $(\ln 2, 2-\ln^2 2)$.

Quesito 5

Provate che una qualsiasi curva di equazione $y=ax^3+bx^2+cx+d$ presenta uno e un solo flesso e che questo è il centro di simmetria della curva.

La curva di equazione $y=ax^3+bx^2+cx+d$ presenta un flesso innanzitutto se $a\neq 0$, in quanto per $a=0$ la cubica degenera in una parabola che non ha flessi.

La derivata prima, seconda e terza della cubica sono rispettivamente $y'=3ax^2+2bx+c,\ y''=6ax+2b,\ y'''=6a$. Essendo $a\neq 0$, anche la derivata terza sarà diversa da zero, mentre la derivata seconda si annulla in $x=-\frac{b}{3a}$. Quindi il flesso si troverà all'ascissa $x=-\frac{b}{3a}$ e sarà a tangente obliqua se $y'\left(-\frac{b}{3a}\right)\neq 0$ o a tangente orizzontale se $y'\left(-\frac{b}{3a}\right)=0$. Ad esempio se $a=1, b=c=d=0$ la cubica presenterà un flesso a tangente orizzontale in $(0,0)$, mentre se $a=1, b=0, c=-3, d=0$ la cubica presenterà un flesso a tangente obliqua in $(0,0)$ e l'equazione della tangente obliqua è $y=-3x$.

Per dimostrare che il flesso è centro di simmetria facciamo la seguente considerazione.

Se S è centro di simmetria, una qualsiasi retta per S interseca la curva in due punti P_1 e P_2 simmetrici rispetto ad S. Siano $P_1(x_1;y_1)$, $P_2(x_2;y_2)$, $S(\alpha;\beta)$. S è medio fra P_1 e P_2 quindi $\alpha=\frac{x_1+x_2}{2}$ e $\beta=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. Da $\beta=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ si ha $2\beta=f(x_1)+f(x_2)=f(x_1)+f(2\alpha-x_1)$. Questa relazione deve valere $\forall x\in D_f$, per cui diventa $f(x)+f(2\alpha-x)=2\beta$. Proviamo allora che il flesso $\left(-\frac{b}{3a},\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d\right)$ soddisfa la relazione $f(x)+f\left(-\frac{2b}{3a}-x\right)=\frac{4b^3}{27a^2}-\frac{2bc}{3a}+2d$. Si ha:

$$\left\|\begin{array}{l} f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \\ f\left(-\frac{2b}{3a}-x\right)=-ax^3-bx^2-cx+d+\frac{4b^3}{27a^2}-\frac{2bc}{3a} \end{array}\right. \Rightarrow f(x)+f\left(-\frac{2b}{3a}-x\right)=\frac{4b^3}{27a^2}-\frac{2bc}{3a}+2d$$ come volevasi dimostrare.

Quesito 6

Per quale x la tangente alla curva di equazione $y=\arcsin x$ ha coefficiente angolare 1?

Il coefficiente angolare della tangente ad una curva nel punto $P(x_0,y_0)$ non è altro che il valore che la derivata della funzione stessa assume in $x=x_0$. Nel caso in esame la derivata della funzione $y=\arcsin x$ è $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ed il coefficiente angolare è 1 se $\frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}=1$, cioè se $\sqrt{1-x_0^2}=1\Rightarrow x_0=0$. Quindi la tangente alla curva $y=\arcsin x$ ha coefficiente angolare pari a 1 in $P(0,0)$ e l'equazione della tangente è la bisettrice del primo e terzo quadrante $y=x$.

Quesito 7

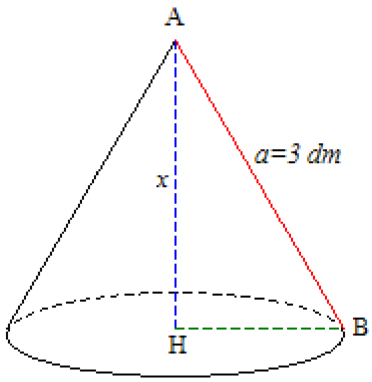
F(x) e G(x) sono due primitive rispettivamente di $y=x^2$ e $y=x$. Sapendo che è $G(0)-F(0)=3$, quanto vale $G(1)-F(1)$?

Essendo F(x) e G(x) primitive rispettivamente di $y=x^2$ e $y=x$ si ha $F(x)=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+h, G(x)=\int xdx=\frac{x^2}{2}+k$. La condizione $G(0)-F(0)=3$ implica $k-h=3$, mentre $G(1)-F(1)=k-h+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=k-h+\frac{1}{6}$, e poichè $k-h=3$, si ha $G(1)-F(1)=3+\frac{1}{6}=\frac{19}{6}$.

Quesito 8

Tra i coni circolari retti di apotema 3 dm quale è quello di capacità massima? Esprimete in litri tale capacità massima.

Consideriamo la figura seguente:



Indichiamo l'altezza del cono $\overline{AH} = x$ con $0 < x < 3$. Per il teorema di Pitagora il raggio di base misura $\overline{HB} = \sqrt{9 - x^2}$. Il volume del cono è $V(x) = \frac{\left(\pi \cdot \overline{HB}^2\right) \cdot \overline{AH}}{3} = \frac{\pi}{3}\left(9x - x^3\right)$. La massimizzazione del volume la effettuiamo tramite derivazione. La derivata prima de volume è $V'(x) = \pi\left(3 - x^2\right)$ per cui nell'intervallo $0 < x < 3$ si ha:

$$\begin{Vmatrix} V'(x) = \pi\left(3 - x^2\right) > 0 \Rightarrow 0 < x < \sqrt{3} \text{ cioè la funzione } V(x) \text{ è strettamente crescente in } \left(0, \sqrt{3}\right) \\ V'(x) = \pi\left(3 - x^2\right) < 0 \Rightarrow \sqrt{3} < x < 3 \text{ cioè la funzione } V(x) \text{ è strettamente decrescente in } \left(\sqrt{3}, 3\right) \\ V'(x) = \pi\left(3 - x^2\right) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3} \end{Vmatrix}$$

Inoltre $V''(x) = -2\pi x$ per cui $V''\left(\sqrt{3}\right) = -2\pi\sqrt{3} < 0$, quindi il volume massimo lo si ha per $x = \sqrt{3}$ e vale $V_{\max} = V\left(\sqrt{3}\right) = \left[\frac{\pi}{3}\left(9x - x^3\right)\right]_{x=\sqrt{3}} = 2\pi\sqrt{3}\ \text{dm}^3$. Poiché $1\,\text{litro} = 1\,\text{dm}^3$, la capacità massima espresso in litri è $V_{\max} = 2\pi\sqrt{3}\ \text{litri} \cong 10.88\ \text{litri}$.