

PROBLEMA 1

E' assegnata la seguente equazione in x :

$$x^3 + 2x - 50 = 0.$$

- Dimostrare che ammette una e una sola soluzione \bar{x} nel campo reale.
- Determinare il numero intero z tale che risulti: $z < \bar{x} < z + 1$.
- Dopo aver riferito il piano a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), determinare, se esistono, i valori del parametro reale k ($k \neq -1$) per cui la curva C_k di equazione:

$$y = (x^3 + 2x - 50) + k(x^3 + 2x - 75)$$
 ammette un massimo e un minimo relativi.
- Stabilire se esiste un valore \bar{k} di k per cui la curva C_k è simmetrica rispetto all'origine O.
- Stabilire se fra le rette di equazione $y = 5x + m$, dove m è un parametro reale, ve ne sono di tangenti alla curva C_0 ottenuta per $k = 0$.

Soluzione

1)

La funzione $y = x^3 + 2x - 50$ è definita in tutto \mathbb{R} e a $\pm\infty$ ammette i seguenti valori:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 2x - 50) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x - 50) = -\infty.$$

Inoltre la sua derivata è $y' = 3x^2 + 2$ che risulta essere sempre positiva in tutto \mathbb{R} ; quindi la funzione $y = x^3 + 2x - 50$ è sempre crescente e tende a $\pm\infty$ quando $x \rightarrow \pm\infty$, per cui essa intersecherà l'asse delle ascisse una sola volta, avrà cioè un unico zero l'equazione corrispondente $y = x^3 + 2x - 50 = 0$.

2)

Per capire quale sia l'intervallo in cui cade l'unico zero, si può applicare il teorema degli zeri. In particolare essendo $f(3) = -17 < 0$, $f(4) = 22 > 0$, allora del teorema suddetto l'unico zero si troverà all'interno dell'intervallo $[3, 4]$.

3)

Riscriviamo la curva parametrica nel modo seguente: $C_k : y_k(x) = (k+1)x^3 + (k+1)2x - 25(3k+2)$.

La derivata sarà pari a: $y' = 3x^2(k+1) + 2(k+1) = (k+1)(3x^2 + 2)$, per cui se $(k+1) > 0$ la derivata sarà sempre positiva e la funzione è sempre crescente, mentre se $(k+1) < 0$ la derivata sarà sempre negativa e la funzione sarà decrescente. Per cui non esiste alcun valore del parametro k per cui la funzione presenti un massimo ed un minimo relativo.

4)

La curva $C_k : y_k(x) = (k+1)x^3 + (k+1)2x - 25(3k+2)$ è simmetrica rispetto all'origine se $y_k(x) = -y_k(-x)$ e quindi se

$$(k+1)x^3 + (k+1)2x - 25(3k+2) = - \left[(k+1)(-x)^3 + (k+1)2(-x) - 25(3k+2) \right]$$

da cui

$$(k+1)x^3 + (k+1)2x - 25(3k+2) = (k+1)x^3 + (k+1)2x + 25(3k+2)$$

e questa equazione vale se e solo se

$$-25(3k+2) = +25(3k+2) \Leftrightarrow (3k+2) = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{2}{3}$$

In tal caso la curva sarà $y_{k=-\frac{2}{3}}(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2x}{3}$.

Studiamo tale curva:

✚ Dominio: tutto \mathbb{R}

✚ Intersezioni asse delle ascisse: $y_{k=-\frac{2}{3}}(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2x}{3} = \frac{x(x^2+2)}{3} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

✚ Intersezione asse ordinate: $x = 0 \Rightarrow y = 0$;

✚ Parità o disparità: la funzione come dimostrato è dispari essendo simmetrica rispetto all'origine;

✚ Positività: $y_{k=-\frac{2}{3}}(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2x}{3} = \frac{x(x^2+2)}{3} > 0 \Leftrightarrow x > 0$;

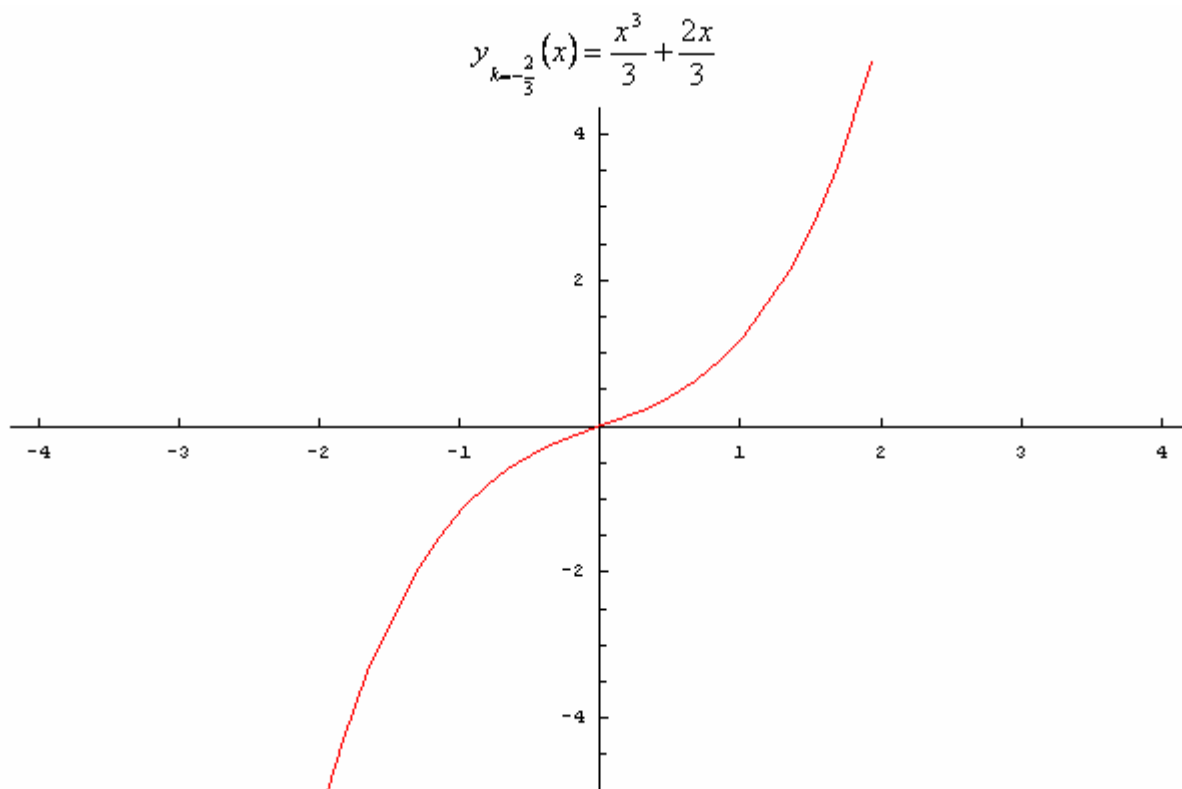
✚ Asintoti verticali: non ce ne sono visto il dominio di definizione;

✚ Asintoti orizzontali: non ce ne sono dal momento che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x}{3} \right) = \pm\infty$;

✚ Asintoti obliqui: non ce ne sono visto che la funzione cubica è definita in tutto \mathbb{R} ;

✚ Crescenza e decrescenza: abbiamo dimostrato precedentemente che per $k > -1$ la funzione era sempre crescente. Ora essendo $k = -\frac{2}{3} > -1$, la funzione $y_{k=-\frac{2}{3}}(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2x}{3}$ è sempre crescente. Inoltre la derivata seconda è $y'' = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, per cui l'origine (0,0) è un flesso per la cubica.

Il grafico è sotto presentato:



5)

La curva C_0 ha equazione $C_0 : y_0(x) = x^3 + 2x - 50$. Una eventuale sua tangente ha equazione del tipo $y = m_1(x - x_1) + y_1$ dove (x_1, y_1) è il punto di tangenza.

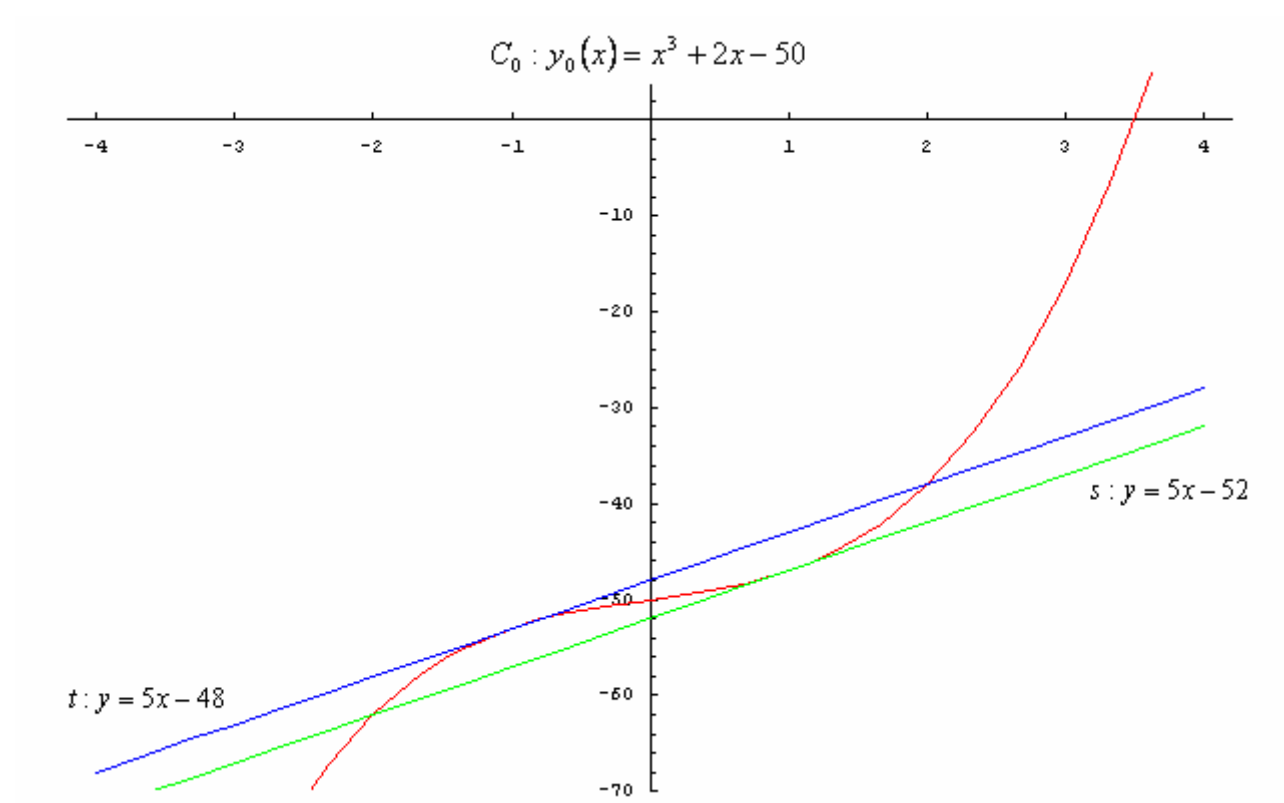
Nel caso in esame, il coefficiente angolare m_1 è pari al valore della derivata nell'ascissa del punto di tangenza, per cui $m_1 = [3x^2 + 2]_{x=x_1} = 3x_1^2 + 2$, per cui la retta di equazione $y = 5x + m$ è tangente alla curva $C_0 : y_0(x) = x^3 + 2x - 50$ se e solo se $m_1 = 3x_1^2 + 2 = 5 \Leftrightarrow 3x_1^2 = 3 \Leftrightarrow x_1 = \pm 1$. Quindi gli eventuali punti di tangenza sono $A = (1, -47), B = (-1, -53)$.

A questo punto i corrispondenti valori del parametro m che rendono la retta $y = 5x + m$ tangente alla curva $C_0 : y_0(x) = x^3 + 2x - 50$ saranno: $m_{+1} = -47 - 5 = -52, m_{-1} = -53 + 5 = -48$.

Quindi le rette tangenti sono:

$$s : y = 5x - 52$$

$$t : y = 5x - 48$$



PROBLEMA 2

La base minore, la base maggiore e il perimetro di un trapezio isoscele misurano nell'ordine:

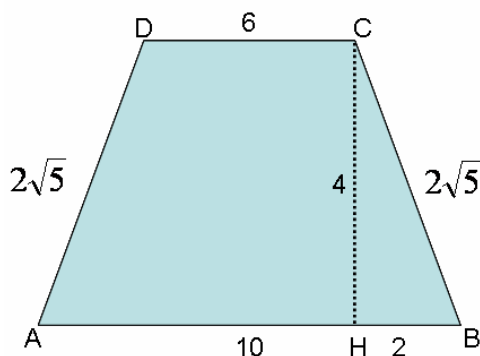
$$6\text{cm}, 10\text{cm}, 4(4 + \sqrt{5})\text{cm}.$$

- Dire, giustificando la risposta, se il trapezio è circoscrittibile a una circonferenza.
- Spiegare perché il trapezio è inscrittibile in una circonferenza k .
- Dopo aver riferito il piano del trapezio a un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, trovare l'equazione di k .
- Trovare l'equazione della parabola p passante per gli estremi della base minore del trapezio e avente l'asse perpendicolare a tale base e il vertice nel centro di k .
- Calcolare le aree delle regioni piane in cui la parabola p divide il trapezio.
- Calcolare le aree delle regioni piane in cui la parabola p divide il cerchio delimitato da k .

Soluzione

a)

Il trapezio è sotto rappresentato: i lati obliqui misureranno $AD = CB = 2\sqrt{5}$:



Per essere circoscrittibile ad una circonferenza un qualsiasi quadrilatero deve avere la somma dei lati opposti uguale: in questo caso $(AB + CD) = 16 \neq 4\sqrt{5} = (AD + BC)$, per cui il trapezio isoscele suddetto non è circoscrivibile ad una circonferenza.

b)

Condizione necessaria e sufficiente per l'inscrivibilità di un quadrilatero è che gli angoli opposti siano supplementari.

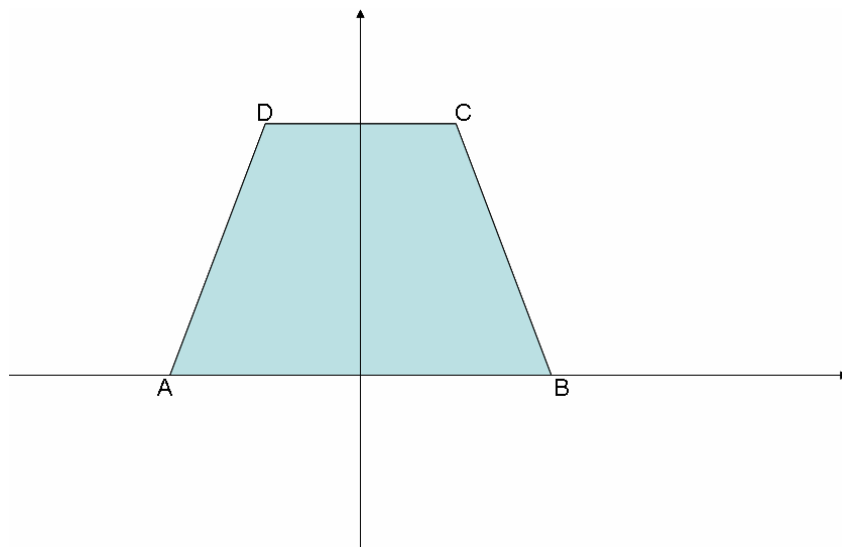
Nel caso del trapezio isoscele si ha:

$$\begin{aligned} \hat{DAB} &= \hat{ABC} \\ \hat{ADC} &= \hat{BCD} \end{aligned}$$

ed inoltre gli angoli \hat{DAB}, \hat{ADC} e \hat{ABC}, \hat{BCD} sono supplementari in quanto coniugati interni. Ecco per cui che gli angoli opposti sono supplementari ed è soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente per l'inscrivibilità del trapezio isoscele.

c)

Consideriamo come sistema di riferimento un sistema che ha l'origine nel punto medio della base maggiore del trapezio, con la suddetta base sull'asse delle ascisse, come di seguito presentato:



Il trapezio ha altezza che misura per il teorema di Pitagora $CH = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2^2} = \sqrt{16} = 4$.

Con tale sistema di riferimento i vertici del trapezio hanno le seguenti coordinate:

$$A = (-5, 0)$$

$$B = (5, 0)$$

$$C = (3, 4)$$

$$D = (-3, 4)$$

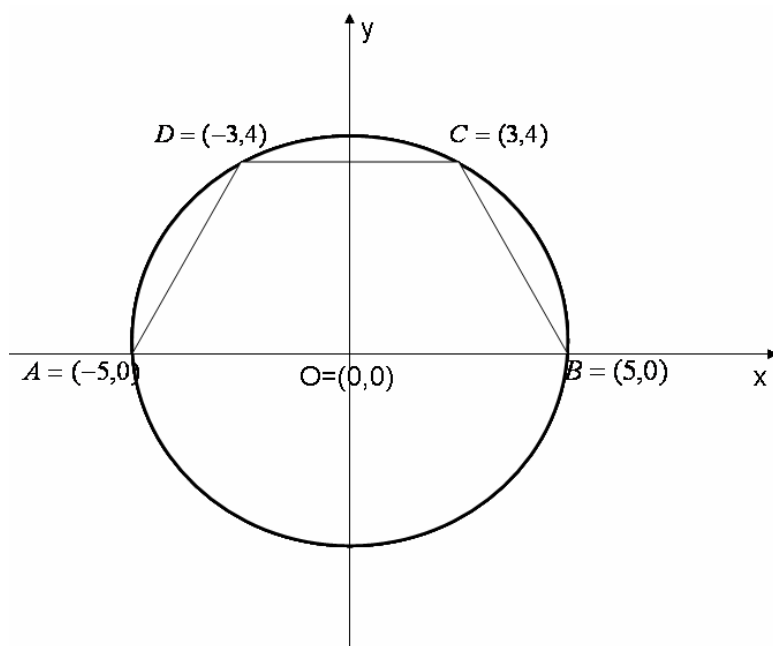
L'equazione di una generica circonferenza è $k: x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Per trovare i tre parametri restanti, imponiamo il passaggio per i tre punti A, B e C, ottenendo il sistema seguente:

$$\begin{cases} -5a + c + 25 = 0 \\ 5a + c + 25 = 0 \\ 3a + 4b + c + 25 = 0 \end{cases}$$

Ora sommando le prime due equazioni si ottiene $c = -25$, mentre sottraendole si ottiene $a = 0$.

Dalla terza equazione si ottiene $b = 0$.

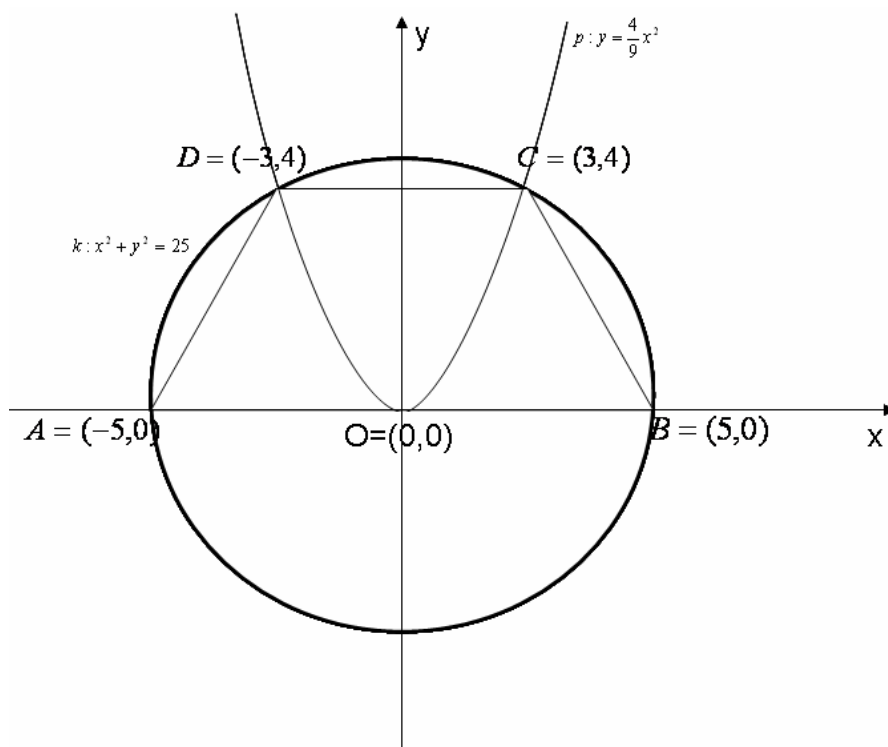
L'equazione risultante è quindi $k: x^2 + y^2 = 25$.



d)

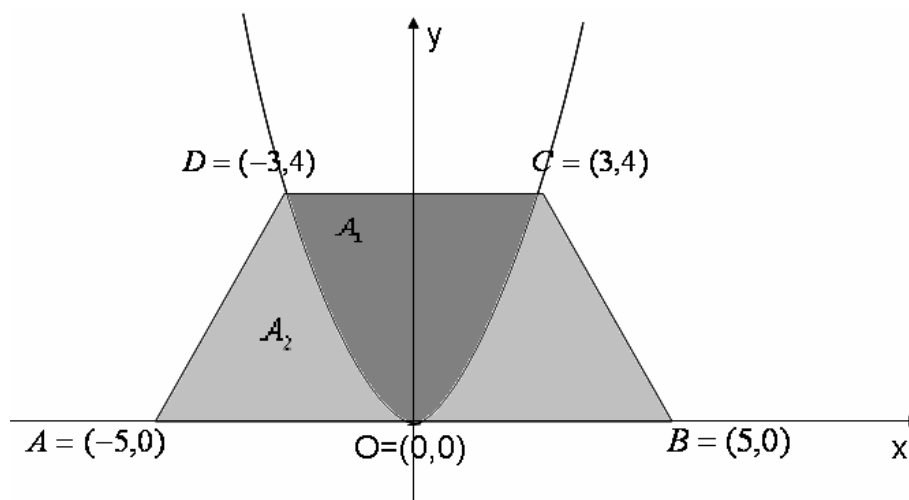
Il centro della circonferenza coincide col centro del sistema di riferimento cioè $O = (0,0)$. La parabola p avrà equazione generica allora del tipo $p : y = ax^2$, ed imponendo il passaggio per C o D

si ottiene $4 = 9a \rightarrow a = \frac{4}{9}$ da cui $p : y = \frac{4}{9}x^2$



e)

Le aree da calcolare sono sotto raffigurate in due tonalità di grigio (scuro e chiaro):



L'area del settore parabolico delimitato dalla parabola e dalla base minore del trapezio si calcola facilmente attraverso il teorema di Archimede secondo cui l'area di un settore parabolico è pari ai $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo circoscritto.

In tal caso l'area del rettangolo circoscritto è $A_R = 6 \cdot 4 = 24$, per cui l'area del settore parabolico sarà $A_1 = \frac{2}{3} \cdot 24 = 16$.

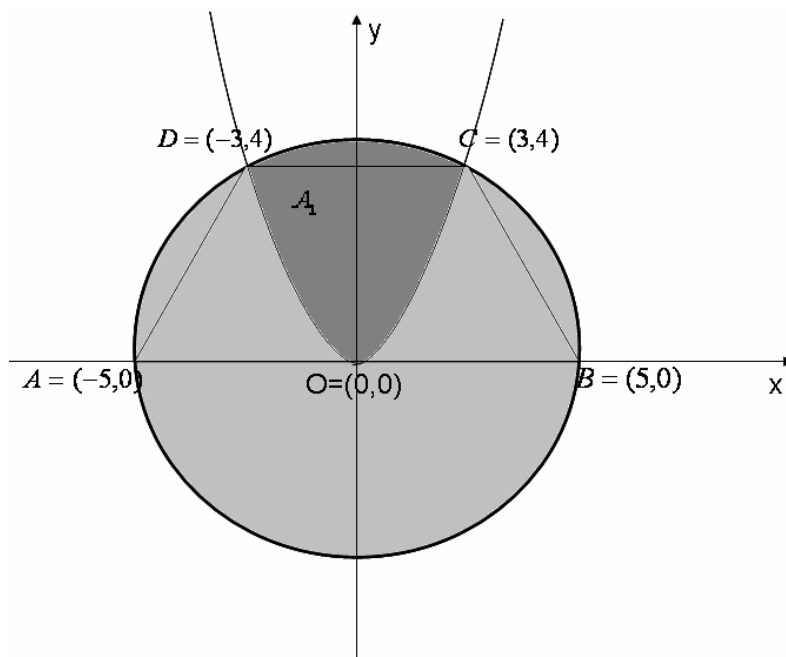
Un altro modo per calcolare l'area del settore parabolico è utilizzare il calcolo integrale per cui

$A_1 = \int_{-3}^3 \left[4 - \frac{4}{9}x^2 \right] dx \stackrel{\text{INTEGRANDO PARI}}{=} 2 \int_0^3 \left[4 - \frac{4}{9}x^2 \right] dx = 2 \left[4x - \frac{4}{27}x^3 \right]_0^3 = 2[12 - 4] = 16$ come già precedentemente calcolato.

L'altra area sarà pari a $A_2 = A_{ABCD} - A_1 = \frac{(16) \cdot 4}{2} - 16 = 16$.

f)

Le aree da calcolare sono sotto raffigurate in due tonalità di grigio (scuro e chiaro):



L'area A_1 è pari al seguente integrale:

$$A_1 = \int_{-3}^3 \left[\sqrt{25-x^2} - \frac{4}{9}x^2 \right] dx \stackrel{\text{INTEGRANDO PARI}}{=} 2 \int_0^3 \left[\sqrt{25-x^2} \right] dx - 2 \left[\frac{4}{27}x^3 \right]_0^3 = 2 \int_0^3 \left[\sqrt{25-x^2} \right] dx - 8$$

L'integrale $\int \sqrt{25-x^2} dx$ lo risolviamo integrando per parti ottenendo:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{25-x^2} dx &= x\sqrt{25-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{25-x^2}} dx = \\ &= x\sqrt{25-x^2} - \int \frac{(25-x^2)-25}{\sqrt{25-x^2}} dx = \\ &= x\sqrt{25-x^2} + \int \frac{25}{\sqrt{25-x^2}} dx - \int \sqrt{25-x^2} dx \Rightarrow \\ \int \sqrt{25-x^2} dx &= \frac{x\sqrt{25-x^2}}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{25}{\sqrt{25-x^2}} dx = \\ &= \frac{x\sqrt{25-x^2}}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{5}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{5}\right)^2}} dx = \frac{x\sqrt{25-x^2}}{2} + \frac{25}{2} \int \frac{\frac{1}{5}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{5}\right)^2}} dx = \\ &= \frac{x\sqrt{25-x^2}}{2} + \frac{25}{2} \arcsin\left(\frac{x}{5}\right) + K \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } 2 \int_0^3 \left[\sqrt{25-x^2} \right] dx = 2 \left[\frac{x\sqrt{25-x^2}}{2} + \frac{25}{2} \arcsin\left(\frac{x}{5}\right) \right]_0^3 = 2 \left[6 + \frac{25}{2} \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \right] \text{ da cui}$$

$$A_1 = 2 \left[6 + \frac{25}{2} \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \right] - 8 = 4 + 25 \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$$

e per differenza l'altra area sarà $A_2 = \pi(5)^2 - A_1 = 25\pi - 4 - 25 \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$.

■ QUESTIONARIO

1 Nell'insieme delle rette dello spazio si consideri la relazione così definita: «due rette si dicono parallele se sono complanari e non hanno punti comuni». Dire se è vero o falso che gode della proprietà transitiva e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2 In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) , è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$8x^2 + 8y^2 - 4kx + 8y - 3k = 0,$$

dove k è un parametro reale. Calcolare per quali valori di k il luogo è costituito da:

1) un punto; 2) due punti; 3) infiniti punti; 4) nessun punto.

3 Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché un trapezio rettangolo abbia le diagonali perpendicolari è che le misure della base minore, dell'altezza e della base maggiore, prese nell'ordine e considerate rispetto alla stessa unità di misura, siano numeri in progressione geometrica.

4 Dire se è vero che risulta: $\sqrt{x^2 + 2x\sqrt{3} + 3} = x + \sqrt{3}$ per ogni x reale e giustificare la risposta.

5 Si consideri la funzione polinomiale in x :

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Dimostrare che il suo grafico, rappresentato in un piano cartesiano, ha come tangente nel punto di ascissa 0 la retta di equazione $y = a_0 + a_1x$.

6 Si consideri la successione di termine generale a_n tale che:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ a_{n-1} + n & \text{se } n > 1 \end{cases}.$$

Calcolare a_{100} .

7 Considerata la successione di termine generale:

$$a_n = \frac{2}{3^n},$$

calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

8 Considerata la funzione $f(x)$ tale che:

$$f(x) = \int_0^x (1 - \ln t) dt, \text{ con } x > 0,$$

determinare i suoi zeri e gli intervalli in cui cresce o decresce.

9 Come si sa, la parte di sfera compresa fra due piani paralleli che la secano si chiama *segmento sferico a due basi*. Indicati con r_1 ed r_2 i raggi delle due basi del segmento sferico e con h la sua altezza (distanza tra le basi), dimostrare che il volume V del segmento sferico considerato è dato dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{6} \pi h (b^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2).$$

Qualunque sia il metodo seguito per la dimostrazione, esplicitare ciò che si ammette.

10 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (1 - e^{-t}) dt}{\sin^2 x}$$

essendo e la base dei logaritmi naturali.

QUESTIONARIO

1) Nell'insieme delle rette dello spazio si consideri la relazione così definita: "due rette si dicono parallele se sono complanari e non hanno punti in comune". Dire se è vero o falso che gode della proprietà transitiva e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

La relazione "due rette si dicono parallele se sono complanari e non hanno punti in comune" è una relazione che gode della proprietà di transitività.

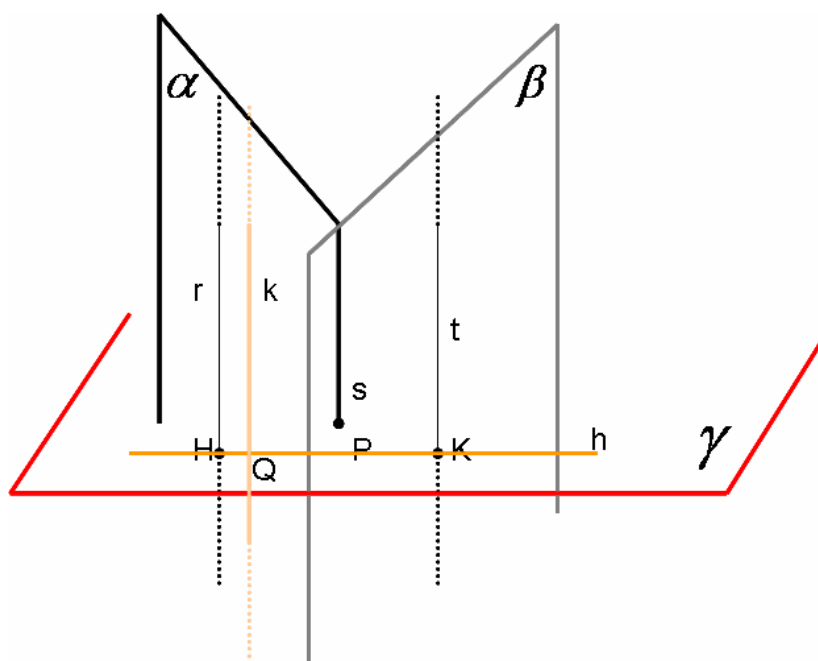
A tal proposito consideriamo tre piani con le seguenti proprietà:

- Piano α contenente le rette r ed s parallele tra loro;
- Piano β contenente le rette s e t parallele tra loro;
- Piano γ perpendicolare alla retta s .

I due piani, α e β , hanno quindi la retta s come intersezione.

Inoltre i punti H, P e K rappresentano le proiezioni delle rette r, s, t sul piano γ ; la retta h è la retta congiungente i punti proiezioni A e B , mentre la retta k è una generica retta perpendicolare alla retta h in un punto Q .

La figura sottostante rappresenta geometricamente quanto detto sinora.



Innanzitutto, ricordando che date due rette parallele, se un piano è perpendicolare all'una è perpendicolare anche all'altra, si ha che il piano γ è perpendicolare anche alle rette r e t .

Ora dimostreremo come due rette perpendicolari ad un dato piano siano parallele tra loro.

Siccome $r \perp \gamma$ e $h \perp k$ per il teorema delle tre perpendicolari la retta k è perpendicolare al piano contenente r ed h ; analogamente $t \perp \gamma$ e $h \perp k$ per il teorema delle tre perpendicolari la retta k è

perpendicolare al piano contenente t ed h ; poiché di piani perpendicolari alla retta k passante per Q ve ne è uno ed uno solo, deduciamo che le rette r e t sono complanari. Essendo queste ultime complanari ed entrambe perpendicolari alla stessa retta h , esse sono parallele.

2) In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$8x^2 + 8y^2 - 4kx + 8y - 3k = 0$$

dove k è un parametro reale. Calcolare per quali valori di k il luogo è costituito da:

1) un punto, 2) due punti, 3) infiniti punti, 4) nessun punto.

L'equazione del luogo può essere riscritta nel modo seguente:

$$x^2 + y^2 + y + k\left(-\frac{x}{2} - \frac{3}{8}\right) = 0$$

e cioè il luogo è una combinazione lineare tra una circonferenza di centro $C = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$ e la retta di

equazione $x = -\frac{3}{4}$. Il luogo si riconduce ad un fascio di circonferenze di centro $C_k = \left(\frac{k}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ se il

raggio risulta essere un valore positivo e cioè se

$$\begin{aligned} r_k &= \sqrt{\frac{k^2}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3k}{8}} = \frac{1}{4} \sqrt{k^2 + 6k + 4} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k^2 + 6k + 4 > 0 \Leftrightarrow k < -3 - \sqrt{5} \vee k > -3 + \sqrt{5} \end{aligned}$$





Inoltre in tal caso il fascio di circonferenze avrà come generatrici la circonferenza di equazione

$x^2 + y^2 + y = 0$ e l'asse radicale di equazione $x = -\frac{3}{4}$. Ma tali due generatrici non hanno punti in

comune; infatti l'equazione $\frac{9}{16} + y^2 + y = 0$ non è risolta per nessun valore reale, per cui l'asse

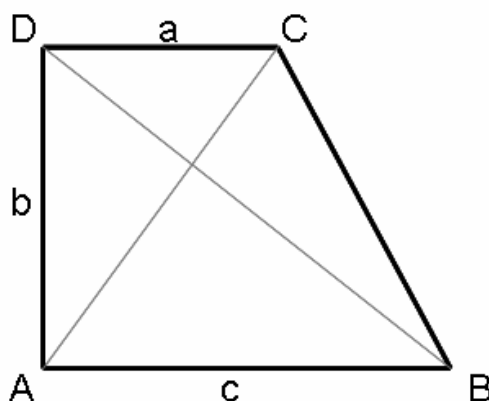
radicale è esterno alla circonferenza base generatrice; da ciò si deduce che le circonferenze del fascio non hanno punti in comune cioè non hanno punti base.

In conclusione il luogo geometrico è costituito da:

-  1 punto se $r_k = 0 \Leftrightarrow k = -3 \pm \sqrt{5}$;
-  2 punti per nessun valore di k ;
-  Infiniti punti per $k < -3 - \sqrt{5} \vee k > -3 + \sqrt{5}$;
-  Nessun punto per $-3 - \sqrt{5} < k < -3 + \sqrt{5}$.

3) Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché un trapezio rettangolo abbia le diagonali perpendicolari è che le misure della base minore, dell'altezza e della base maggiore, prese nell'ordine e considerate rispetto alla stessa unità di misura, siano numeri in progressione geometrica.

Consideriamo il trapezio rettangolo sottostante con base minore, altezza e base maggiore pari ad a, b e c .



Dimostriamo prima la condizione necessaria, e cioè se le diagonali DB ed AC sono perpendicolari allora vale la seguente relazione $b : a = c : b$. Se $DB \perp AC$ i triangoli DAB e ADC sono simili per il primo criterio di similitudine: infatti hanno un angolo retto ambedue e poi $\hat{ADB} = \hat{DCA}$ in quanto complementari dell'angolo \hat{CDB} . Per cui i lati omologhi saranno in proporzione e cioè $b : a = c : b$. Dimostriamo ora che la condizione $b : a = c : b$ è anche sufficiente. In tali ipotesi per il secondo criterio di similitudine i triangoli DAB e ADC sono simili ed in particolare $\hat{ADB} = \hat{DCA}$; inoltre i triangoli DEC e DAB saranno simili per il primo criterio di similitudine avendo tutti gli angoli uguali ed in particolare $\hat{ADB} = \hat{DCA}$ come prima dimostrato e $\hat{ABD} = \hat{CDB} = \hat{CDE}$ in quanto alterni interni; da ciò si deduce che $\hat{DEC} = \hat{DAB}$ e cioè le diagonali sono perpendicolari.

4) Dire se è vero che risulta: $\sqrt{x^2 + 2x\sqrt{3} + 3} = x + \sqrt{3}$ per ogni x reale e giustificare la risposta.

La risposta è ovviamente negativa: infatti l'equazione

$$\sqrt{x^2 + 2x\sqrt{3} + 3} = x + \sqrt{3}$$

può essere riscritta, ricordando che $\sqrt{x^2 + 2x\sqrt{3} + 3} = \sqrt{(x + \sqrt{3})^2}$ e che $\sqrt{f^2(x)} = |f(x)|$, nel seguente modo:

$$|x + \sqrt{3}| = x + \sqrt{3}$$

che risulta vera se e solo se $x + \sqrt{3} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\sqrt{3}$.

5) Si consideri la funzione polinomiale in x:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Dimostrare che il suo grafico, rappresentato in un piano cartesiano, ha come tangente nel punto di ascissa 0 la retta di equazione $y = a_0 + a_1x$.

Il punto di tangenza è $(0, a_0)$ e la derivata della funzione è $y' = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$ per cui il coefficiente angolare della retta tangente sarà $m = y'(x=0) = a_1$ per cui l'equazione della tangente è $t: y = a_0 + a_1x$.

6) Si consideri la successione di termine generale a_n tale che:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ a_{n-1} + n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Calcolare a_{100} .

Scriviamo i termini della successione:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2$$

$$a_3 = a_2 + 3 = 1 + 2 + 3$$

$$a_4 = a_3 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4$$

\vdots

\vdots

$$a_{100} = a_{99} + 100 = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100$$

Per cui la somma della serie richiesta è la somma dei primi 100 numeri naturali e cioè

$$\sum_{n=1}^{100} a_n = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050 \text{ avendo ricordato che } \sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

7) Considerata la successione di termine generale:

$$a_n = \frac{2}{3^n}$$

calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Scriviamo la serie numerica in questo modo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - 1 \right] = 2 \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - 1 \right] = 2 \left[\frac{3}{2} - 1 \right] = 1$$

avendo ricordato che $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, |q| < 1$.

8) Considera la funzione $f(x)$ tale che:

$$f(x) = \int_0^x (1 - \ln t) dt, \quad \text{con } x > 0$$

determinare i suoi zeri e gli intervalli in cui cresce o decresce.

La funzione $f(x)$, risolvendo l'integrale per parti sarà:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x [1 - \ln(t)] dt = \int_0^x dt - \int_0^x \ln(t) dt = \\ &= \int_0^x dt - \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_h^x \ln(t) dt = \\ &= x - \lim_{h \rightarrow 0^+} [t(\ln(t) - 1)]_h^x = x - x(\ln(x) - 1) + \lim_{h \rightarrow 0^+} [h(\ln(h) - 1)] = \\ &= 2x - x \ln(x) + \lim_{h \rightarrow 0^+} [h \ln(h)] = 2x - x \ln(x) = x[2 - \ln(x)] \end{aligned}$$

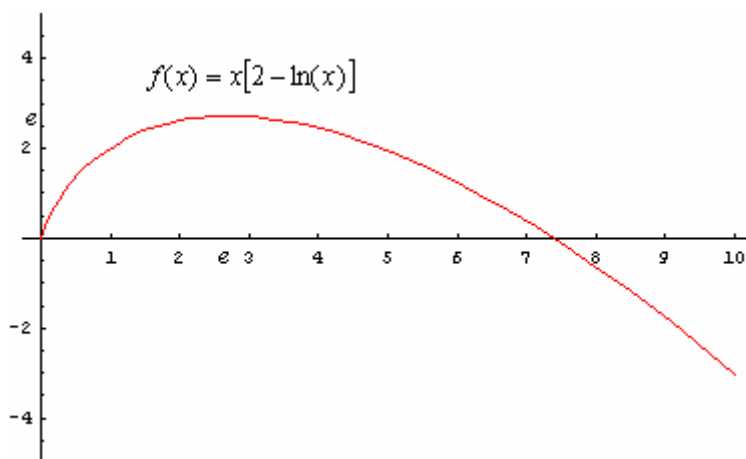
essendo $\lim_{h \rightarrow 0^+} [h \ln(h)] = 0$.

Ora $f(x) = x[2 - \ln(x)] = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee [2 - \ln(x)] = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = e^2$. Ma $x = 0$ non è accettabile in quanto si richiede la determinazione degli zeri per $x > 0$. Si noti a tal riguardo che la funzione $f(x) = x[2 - \ln(x)]$ non è definita in $x = 0$ ma è prolungabile per continuità in esso.

La sua derivata per il teorema fondamentale sul calcolo integrale sarà pari a

$$f'(x) = D \left[\int_0^x (1 - \ln t) dt \right] = 1 - \ln(x) \quad \text{ed essa è strettamente crescente se}$$

$f'(x) = 1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < e$ ed è strettamente decrescente se $x > e$. In particolare il punto $M = (e, e)$ è di massimo relativo.

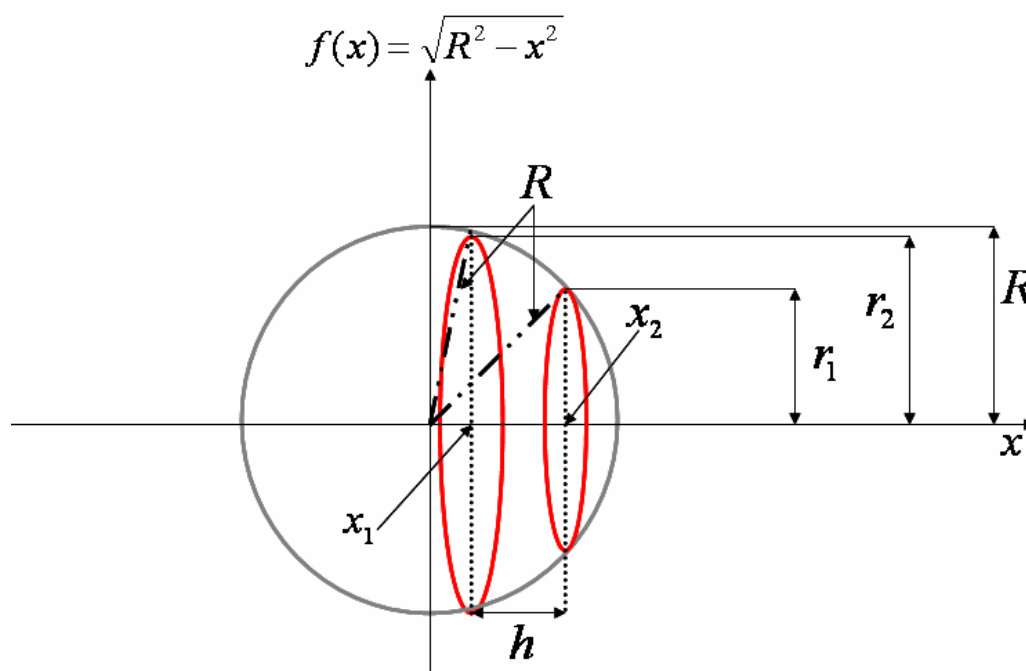


9) Come si sa, la parte di sfera compresa fra due piani paralleli che la secano si chiama segmento sferico a due basi. Indicati con r_1 e r_2 i raggi delle due basi del segmento sferico e con h la sua distanza tra le basi, dimostrare che il volume V del segmento sferico considerato è dato dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{6} \pi h (h^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2)$$

Qualunque sia il metodo seguito per la dimostrazione, esplicitare ciò che si ammette.

Il segmento sferico a due basi lo si può immaginare come relativo ad una rotazione di un arco di circonferenza di equazione $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x_1 \leq x \leq x_2$ intorno all'alle delle ascisse come sotto rappresentato:



In tal caso attraverso il calcolo integrale si ha che per il teorema di Guldino il volume sarà:

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} (R^2 - x^2) dx = \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{x_1}^{x_2} = R^2 (x_2 - x_1) - \frac{(x_2^3 - x_1^3)}{3} = (x_2 - x_1) \left[R^2 - \frac{(x_2^2 + x_1^2 + x_1 x_2)}{3} \right]$$

Ora $(x_2 - x_1)$ è l'altezza del segmento sferico a due basi, cioè $(x_2 - x_1) = h$. Inoltre per il teorema di Pitagora si ha:

$$\begin{aligned} x_2^2 &= R^2 - r_2^2 \\ x_1^2 &= R^2 - r_1^2 \end{aligned}$$

Poi elevando al quadrato la relazione $(x_2 - x_1) = h$ si ha $x_1 x_2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 - h^2}{2} = \frac{2R^2 - r_1^2 - r_2^2 - h^2}{2}$,

per cui il volume si riscrive:

$$\begin{aligned}
 V &= \pi(x_2 - x_1) \left[R^2 - \frac{(x_2^2 + x_1^2 + x_1 x_2)}{3} \right] = \\
 &= \pi h \left[R^2 - \frac{\left(2R^2 - r_1^2 - r_2^2 + \frac{2R^2 - r_1^2 - r_2^2 - h^2}{2} \right)}{3} \right] = \\
 &= \pi h \left[R^2 - \frac{(6R^2 - 3r_1^2 - 3r_2^2 - h^2)}{6} \right] = \\
 &= \frac{\pi h}{6} [3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2] \quad \text{c.v.d}
 \end{aligned}$$

10) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (1 - e^{-t}) dt}{\sin^2(x)}$$

essendo e la base dei logaritmi naturali.

Il limite richiesto si calcola così:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (1 - e^{-t}) dt}{\sin^2(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[t + e^{-t} \right]_0^x}{\sin^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + e^{-x} - 1}{\sin^2(x)} = \\
 &\stackrel{\text{De L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{2 \sin(x) \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin(2x)} = \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin(2x)} \stackrel{t=-x}{=} \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(2x)}{2x} \right)^{-1} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

avendo sfruttato i limiti notevoli $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(kx)}{kx} \right) = 1$.