PROBLEMA 1

Del triangolo *ABC* si hanno le seguenti informazioni:

AB=3cm; AC=2cm; $C\widehat{A}B = 60°$.

Si tracci la bisettrice di $C\widehat{A}B$ e se ne indichi con *D* l'intersezione con il lato *BC*.

a) Si calcoli la lunghezza del lato *BC* e delle parti in cui esso risulta diviso dal punto *D*.

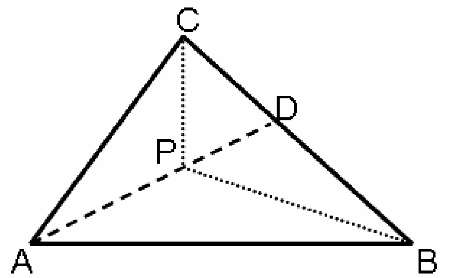
b) Si determinino il coseno dell'angolo in *B*, la misura di *AD* e, disponendo di un calcolatore, le misure approssimate degli altri due angoli interni di vertici *B* e *C*.

c) Si trovi sul lato *AD*, internamente a esso, un punto P tale che la somma *s* dei quadrati delle sue distanze dai vertici *A*, *B* e *C* sia m^2 essendo *m* un parametro reale dato.

d) Si discuta tale ultima questione rispetto al parametro *m*.

Soluzione

Si consideri la figura sottostante che raffigura la geometria del problema:



1)

Il lato BC si può calcolare attraverso il teorema di Carnot, per cui:

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos\left(C\hat{A}B\right)} =$$
$$= \sqrt{4+9-12\cdot\cos(60°)} = \sqrt{4+9-12\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{13-6} = \sqrt{7}$$

Ora per il noto teorema della bisettrice di un angolo interno ad un triangolo, vale la seguente proporzione: $AC : AB = CD : DB$. Ponendo $CD = x, DB = \sqrt{7} - x$ la proporzione si scrive:

$$2:3 = x:\left(\sqrt{7}-x\right) \rightarrow 3x = 2\sqrt{7} - 2x \rightarrow CD = x = \frac{2\sqrt{7}}{5}, DB = \sqrt{7} - x = \frac{3\sqrt{7}}{5}$$

2)

Per il teorema di Carnot vale la seguente equazione:

$$\cos\left(C\hat{B}A\right) = \frac{AB^2 + CB^2 - AC^2}{2AB \cdot CB} = \frac{9+7-4}{6\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

ed ancora per lo stesso teorema si ha:

$$AD = \sqrt{AB^2 + DB^2 - 2AB \cdot DB \cdot \cos\left(C\hat{B}A\right)} =$$
$$= \sqrt{9 + \frac{63}{25} - 2 \cdot 3 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{7}} = \sqrt{9 + \frac{63}{25} - \frac{36}{5}} = \sqrt{\frac{108}{25}} = \frac{6\sqrt{3}}{5}$$

Ora

$$\cos\left(C\hat{B}A\right) = \frac{2\sqrt{7}}{7} \Rightarrow C\hat{B}A = \arccos\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right) \cong 40°53'36''$$
$$B\hat{C}A = 180° - 60° - 40°53'36'' \cong 79°06'24'$$

3)

Poniamo $AP = x, 0 \le x \le \frac{6\sqrt{3}}{5}$.

Applicando il teorema di Carnot due volte si ha:

$$PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2AP \cdot AC \cdot \cos(30°) = x^2 + 4 - 2 \cdot x \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = x^2 - 2\sqrt{3}x + 4$$
$$PB^2 = AP^2 + AB^2 - 2AP \cdot AB \cdot \cos(30°) = x^2 + 9 - 2 \cdot x \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = x^2 - 3\sqrt{3}x + 9$$

Si ha allora:

$$s = AP^2 + PC^2 + PB^2 = 3x^2 - 5\sqrt{3}x + 13 = m^2$$

e cioè si deve discutere il seguente sistema:

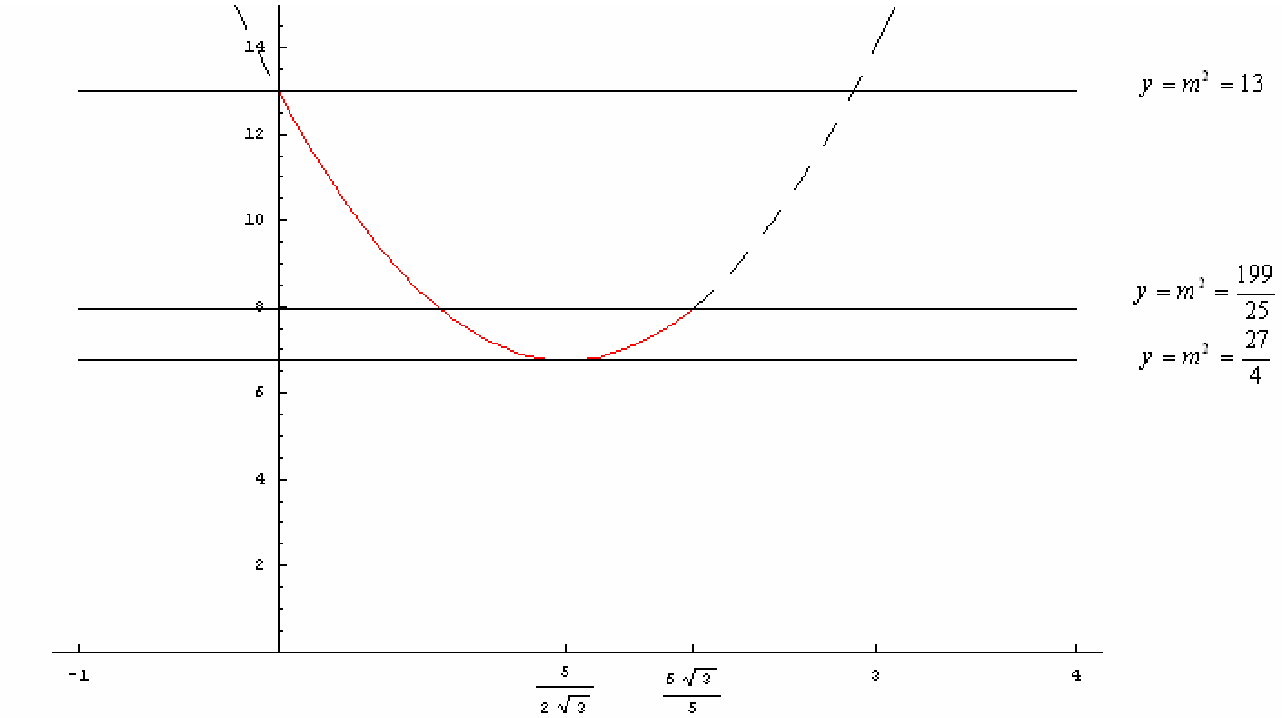
$$\begin{cases} 3x^2 - 5\sqrt{3}x + 13 = m^2 \\ 0 \le x \le \frac{6\sqrt{3}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x^2 - 5\sqrt{3}x + 13 \\ y = m^2 \\ 0 \le x \le \frac{6\sqrt{3}}{5} \end{cases}$$

La prima equazione $y = 3x^2 - 5\sqrt{3}x + 13$ è una parabola con concavità rivolta verso l'alto e vertice nel punto $V = \left(\frac{5\sqrt{3}}{6}, \frac{27}{4}\right)$, mentre la seconda $y = m^2$ è l'equazione di una retta parallela all'asse delle ascisse.

4)

Il valore minimo che può assumere la retta $y = m^2$ è in corrispondenza del vertice della parabola e cioè quando $y = m^2 = \frac{27}{4}$; inoltre agli estremi dell'intervallo di analisi $0 \le x \le \frac{6\sqrt{3}}{5}$ i valori assunti dalla retta $y = m^2$ sono $y_{x=0} = m^2 = 13, y_{x=\frac{6\sqrt{3}}{5}} = m^2 = \frac{199}{25}$.

Il tutto è sotto rappresentato:



Il sistema allora ammette le seguenti soluzioni:

- 2 soluzioni per $\frac{27}{4} \le m^2 \le \frac{199}{25} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2} \le |m| \le \frac{\sqrt{199}}{5}$;
- 1 soluzione per $\frac{199}{25} < m^2 \le 13 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{199}}{5} < |m| \le \sqrt{13}$.

PROBLEMA 2

È data una piramide retta a base quadrata.

a) Si sezioni la piramide con un piano parallelo alla base e si indichino con a, b $(a > b)$ e h rispettivamente le misure degli spigoli delle basi e l'altezza del tronco che ne risulta. Si esprima in funzione di a, b, h il volume del tronco di piramide illustrando il ragionamento seguito.

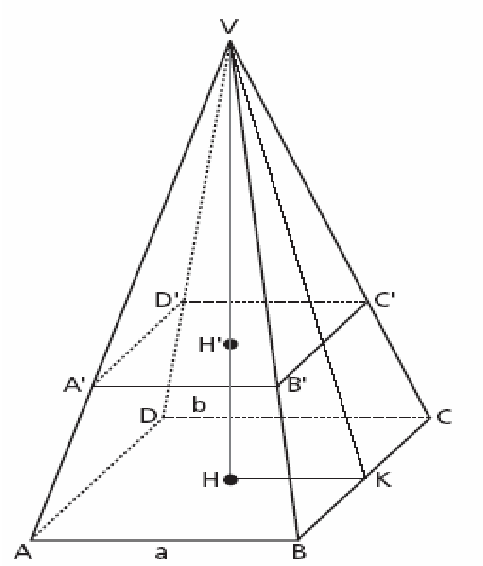
b) Si calcoli il volume massimo della piramide data sapendo che la sua superficie laterale è $\sqrt{3}$ dm^2.

c) Si calcoli il raggio della sfera circoscritta alla piramide massima trovata.

d) Si dia una approssimazione della capacità in litri di tale sfera.

Soluzione

Si consideri la figura seguente:



1)

Le due piramidi, quella iniziale VABCD e quella sezionata VA'B'C'D' sono simili, per cui i quadrati delle altezze stanno come le aree di base cioè vale la seguente proporzione: $a : b = VH : VH'$ che può essere anche riscritta nel modo seguente: $a : b = (h + VH') : VH' \Rightarrow bh + b \cdot VH' = a \cdot VH' \Rightarrow VH' = \dfrac{bh}{a-b}$.

Ora il volume del tronco di piramide può essere calcolato come differenza tra i volumi delle due piramidi e cioè

$$V_{tronco} = V_{VABCD} - V_{VA'B'C'D'} = \frac{1}{3}a^2 \cdot \left(h + \frac{bh}{a-b}\right) - \frac{1}{3}b^2 \cdot \left(\frac{bh}{a-b}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}h\left[a^2\left(1 + \frac{b}{a-b}\right) - b^2\left(\frac{b}{a-b}\right)\right] = \frac{1}{3}h\left[a^2\left(\frac{a}{a-b}\right) - b^2\left(\frac{b}{a-b}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}h\left[\frac{a^3}{a-b} - \frac{b^3}{a-b}\right] = \frac{1}{3}h\left[\frac{a^3 - b^3}{a-b}\right] = \frac{1}{3}h\left[\frac{(a-b)(a^2 + b^2 + ab)}{a-b}\right] = \frac{1}{3}h(a^2 + b^2 + ab)$$

2)

La piramide è a base quadrata, per cui, vista la particolare simmetria, il piede dell'altezza VH della piramide VABCD cade nel centro del quadrato di base e l'apotema è la mediana e l'altezza del triangolo isoscele VBC. Quindi $HK = \frac{a}{2}$ e $VH = \sqrt{VK^2 - \frac{a^2}{4}}$.

Inoltre per ipotesi sappiamo che la superficie laterale vale $\sqrt{3}$, e ricordando che la superficie laterale si calcola come semiperimetro di base moltiplicato per l'apotema VK si ha $VK \cdot 2a = \sqrt{3} \Rightarrow VK = \frac{\sqrt{3}}{2a}$ da cui $VH = \sqrt{\frac{3}{4a^2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3-a^4}}{2a}$. Il volume della piramide sarà allora: $V_{VABCD}(a) = f(a) = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3-a^4}}{2a} = \frac{a\sqrt{3-a^4}}{6}$.

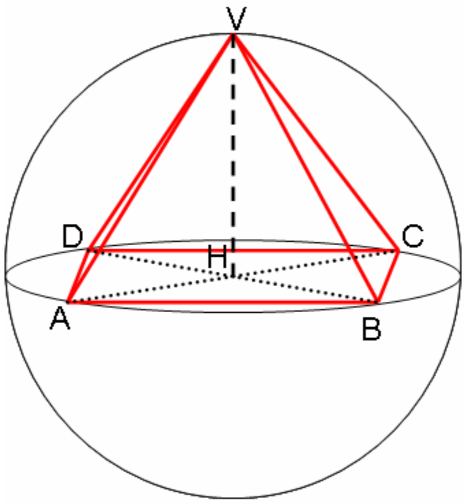
Ora l'esistenza del volume impone la condizione $3 - a^4 \geq 0 \Rightarrow -\sqrt[4]{3} \leq a \leq \sqrt[4]{3}$, ed essendo lo spigolo di base una lunghezza si deve ulteriormente imporre $a \geq 0$, da cui viene fuori la condizione $0 \leq a \leq \sqrt[4]{3}$.

Studiamo allora la crescenza e decrescenza della funzione volume $V_{VABCD}(a) = f(a) = \frac{a\sqrt{3-a^4}}{6}$ nell'intervallo $0 \leq a \leq \sqrt[4]{3}$. La derivata prima è: $f'(a) = \frac{1}{6}\left[\sqrt{3-a^4} + a\left(\frac{-2a^3}{\sqrt{3-a^4}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1-a^4}{\sqrt{3-a^4}}\right)\right]$, per cui $f'(a) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1-a^4}{\sqrt{3-a^4}}\right)\right] \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq a \leq \sqrt[4]{3}$, cioè la funzione volume è crescente nell'intervallo $1 \leq a \leq \sqrt[4]{3}$ e decrescente in $0 \leq a \leq 1$. Cioè il volume è massimo per $a = 1$ e vale $V_{VABCD}(a=1) = f(a=1) = \frac{\sqrt{2}}{6}\,\text{dm}^3$.

In tal caso l'altezza $VH = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{dm}$, l'apotema vale $VK = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{dm}$, gli spigoli di base valgono $1\,\text{dm}$ e gli spigoli laterali valgono per il teorema di Pitagora $VB = \sqrt{VK^2 + KB^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1\,\text{dm}$, cioè le facce laterali sono triangoli equilateri, per cui la piramide è quadrata e retta nello stesso tempo.

3)

Si consideri la seguente figura:



Come già evidenziato nel punto precedente, le diagonali del quadrato sono il doppio dell'altezza della piramide regolare a base quadrata, e cioè $VH = HD = HB = \frac{\sqrt{2}}{2}$, per cui il triangolo VDB è rettangolo in V ed è possibile così inscriverlo in una semicirconferenza; e la sfera circoscritta può essere pensata come conseguente alla rotazione di tale semicirconferenza attorno al diametro DB.

Per cui il raggio della sfera è $R = VH = HD = HB = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4)

Il volume della sfera circoscritta alla piramide di volume massimo è:

$$V_{sfera} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi \text{ dm}^3$$

e ricordando che $1\,\text{dm}^3 \equiv 1\,\text{litro}$ si ha $V_{sfera} = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi \text{ dm}^3 \equiv \frac{\sqrt{2}}{3}\pi \text{ litri} \cong 1{,}48096 \text{ litri}$.

Questionario

1. Tra i rettangoli aventi la stessa area di 16m^2 trovare quello di perimetro minimo.

Soluzione

Dette $x > 0, y > 0$ le misure dei lati del rettangolo, bisogna trovare le misure x, y che minimizzano il perimetro $2p = 2x + 2y$ sapendo che l'area $A = xy = 16$.

La funzione da minimizzare può essere così riscritta:

$$2p = 2x + 2y = 2x + 2\left(\frac{16}{x}\right) = 2\left(x + \frac{16}{x}\right)$$

Calcolandone la derivata si ha: $2p' = 2\left(1 - \frac{16}{x^2}\right) = 2\left(\frac{x^2 - 16}{x^2}\right)$ che risulta essere positiva per $x < -4 \cup x > 4$. Scartando la soluzione negativa si ha che la funzione perimetro è crescente per $x > 4$ e decrescente altrimenti; cioè il perimetro è minimo per $x = y = 4$ cioè quando il rettangolo è un quadrato di lato 4.

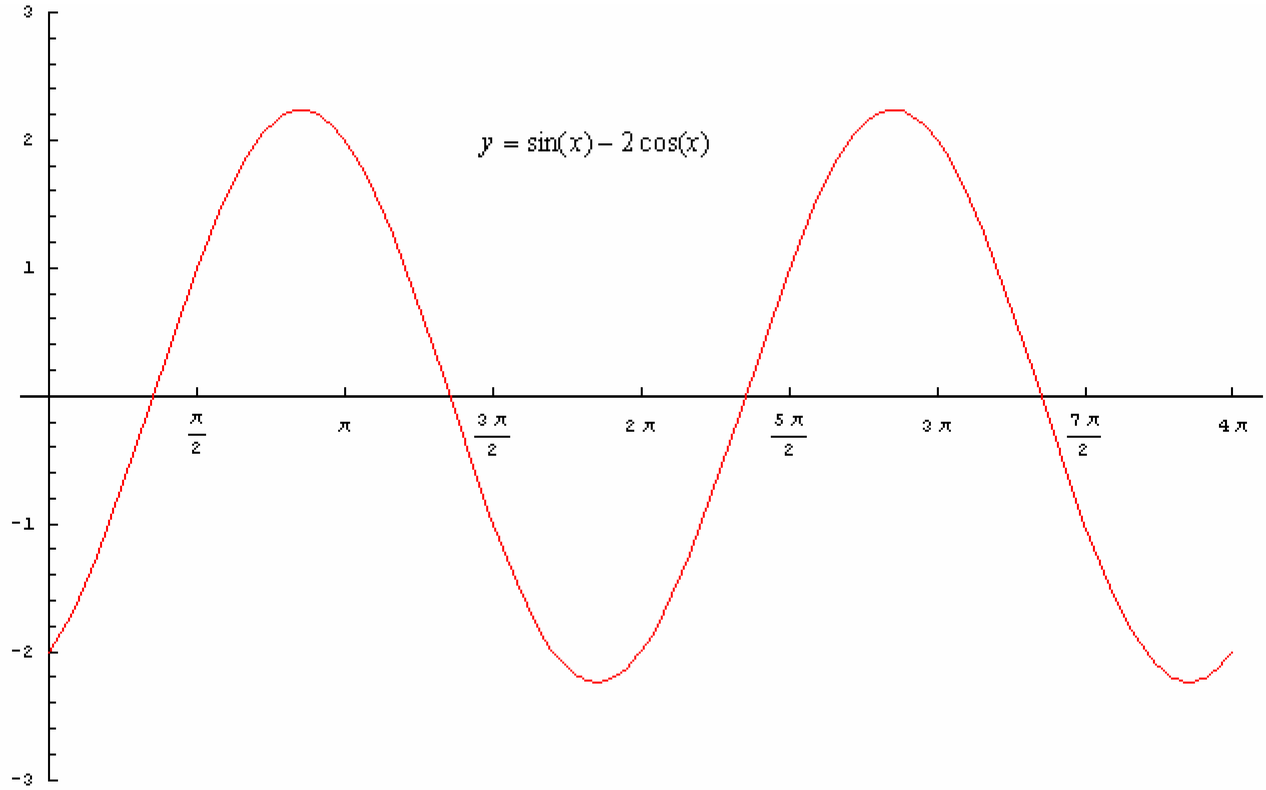
2. Cosa si intende per "funzione periodica"? Qual è il periodo della funzione *f(x)=senx-2cosx*?

Soluzione

Una funzione $f : A \subseteq R \to R$ è periodica di periodo $T > 0$ se $x \in A \to x + kT \in A$ e $f(x) = f(x + kT)$ con $\forall k$ intero. Il piu' piccolo valore di $T > 0$ che soddisfa le due condizioni è detto periodo.

Inoltre va ricordato che il periodo della somma o differenza di due funzioni periodiche è il minimo comune multiplo dei due periodi componenti.

Nel caso in esame le funzioni componenti $(\sin(x), 2\cos(x))$ hanno entrambe periodo pari a 2π per cui il periodo della funzione differenza è esattamente 2π come sotto presentato:



3. Dare un esempio di un solido la cui superficie laterale è 24π.

Soluzione

Un cono circolare retto di apotema *a* e raggio di base *r* ha superficie laterale pari a $S_l = \pi \cdot r \cdot a$, per cui la condizione $S_l = \pi \cdot r \cdot a = 24\pi \Rightarrow r \cdot a = 24$; quindi un cono con apotema pari a 8 e raggio 3 soddisfa alle condizioni richieste.

4 Provare che se l'equazione $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ha due soluzioni entrambe di valore k, allora k è anche soluzione dell'equazione $y' = 0$ avendo posto $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. A quale condizione k è anche soluzione di $y'' = 0$?

Soluzione

Se l'equazione cubica $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ha due soluzioni coincidenti reali pari a k, questo significa che tutte e tre le soluzioni sono reali, perché ad una eventuale soluzione complessa corrisponderebbe anche la sua complessa coniugata che sommate alle due reali coincidenti farebbero 4 soluzioni e ciò è in contrasto col fatto che le soluzioni della cubica sono 3.

Quindi, essendo tutte reali, il polinomio cubico può essere fattorizzato nel seguente modo: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-k)^2(x-h)$. La sua derivata è $y' = 2a(x-k)(x-h) + a(x-k)^2 = a(x-k)(3x-2h-k)$ da cui si evince che anch'esso si annulla in $x = k$. La derivata seconda è invece $y'' = a(3x-2h-k) + 3a(x-k) = 2a(3x-h-2k)$ ed

$y''(k)=2a(k-h)$, per cui $y''(k)=2a(k-h)=0 \Leftrightarrow h=k$; per cui $x=k$ è soluzione anche di $y''=0$ se e solo se le tre soluzioni della cubica sono reali e coincidenti.

5 Dare una giustificazione delle formule:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha$$

e utilizzarle per provare che:

$$\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1.$$

Soluzione

La formula di addizione per il coseno si esprime in questo modo:

$$\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$$

per cui ponendo $x=y=\alpha$ si ricava

$$\cos(2\alpha)=\cos(\alpha)\cos(\alpha)-\sin(\alpha)\sin(\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)$$

Ora ricordando che $\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$ si ricava alternativamente

$$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=2\cos^2(\alpha)-1=1-2\sin^2(\alpha)$$

Ora riapplicando le stesse formule si ha:

$$\begin{aligned}\cos(4\alpha)&=\cos^2(2\alpha)-\sin^2(2\alpha)=2\cos^2(2\alpha)-1=\\&=2\left[2\cos^2(\alpha)-1\right]^2-1=2\left[4\cos^4(\alpha)-4\cos^2(\alpha)+1\right]-1=\\&=8\cos^4(\alpha)-8\cos^2(\alpha)+1\end{aligned}$$

6 Dimostrare che l'equazione $x^5+10x+1=0$ ammette una sola soluzione reale.

Soluzione

La funzione $y=x^5+10x+1$ ha le seguenti caratteristiche:

- $\lim_{x\to+\infty}\left(x^5+10x+1\right)=+\infty$;
- $\lim_{x\to-\infty}\left(x^5+10x+1\right)=-\infty$;
- E' sempre crescente, infatti $y'=5x^4+10>0\ \forall x\in R$

e queste tre caratteristiche ci assicurano che l'equazione $y=x^5+10x+1=0$ ha una ed una sola radice reale. Tale radice è calcolabile attraverso il teorema degli zeri e si trova nell'intervallo [-1,0]; infatti $y(-1)=-10<0,\ y(0)=1>0$.

7. Enunciare il teorema del valor medio o di Lagrange [da Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813)] e mostrarne le implicazioni ai fini della determinazione della crescenza o decrescenza delle curve.

Soluzione

Il teorema di Lagrange (o del valor medio) afferma che se una funzione reale di variabile reale è continua in un intervallo [*a*; *b*] e derivabile in (*a*; *b*), esiste almeno un punto interno all'intervallo in cui la tangente al grafico della funzione è parallela alla retta che congiunge i punti del grafico corrispondenti agli estremi dell'intervallo [a;b]. Questa è l’interpretazione geometrica del teorema di Lagrange.

In modo più formale:

- Sia $f:[a,b]\to R$
- continua in [a, b]
- derivabile in (a, b)

allora in queste ipotesi $\exists c\in(a,b):\ f^{'}(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Il teorema di Lagrange (o del valor medio) fornisce una condizione sufficiente per la crescenza o decrescenza di una funzione in un intervallo.

Prendiamo a tal proposito una funzione $f(x)$ continua in I e derivabile nei punti interni ad esso. A partire dal teorema di Lagrange si possono dimostrare le seguente 4 proposizioni:

- Se $f'(x)>0$ nei punti interni ad I allora essa è strettamente crescente in I;
- Se $f'(x)<0$ nei punti interni ad I allora essa è strettamente decrescente in I;
- Se $f'(x)\geq 0$ nei punti interni ad I allora essa è crescente in I;
- Se $f'(x)\leq 0$ nei punti interni ad I allora essa è decrescente in I.

Tutte e quattro si dimostrano in modo analogo, per cui dimostreremo solo la prima.

Dim.)

Prendiamo un intervallo $[a,b]\subseteq I$ con $a<b$. Per il teorema di Lagrange si ha che $\exists c\in(a,b):\ f^{'}(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Ora poiché $[a,b]\subseteq I$ con $a<b$ e poiché per ipotesi $f'(x)>0$ nei punti interni ad I, si ha che $f'(c)>0\Rightarrow f(b)>f(a)$ e vista l’arbitrarietà dei punti *a* e *b* scelti, se ne deduce la stretta crescenza nell’intervallo I.

8 Di una funzione $f(x)$ si sa che la sua derivata seconda è 2^x e si sa ancora che:

$f(0) = \left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)^2$ e $f'(0) = 0$.

Qual è $f(x)$?

Soluzione

La soluzione del problema presentato, non è altro che la soluzione del seguente problema di Cauchy per le equazioni differenziali:

$$\begin{cases} f''(x) = 2^x \\ f(0) = \left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)^2 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

L'equazione $f''(x) = 2^x$ si risolve integrando due volte, ed in particolare:

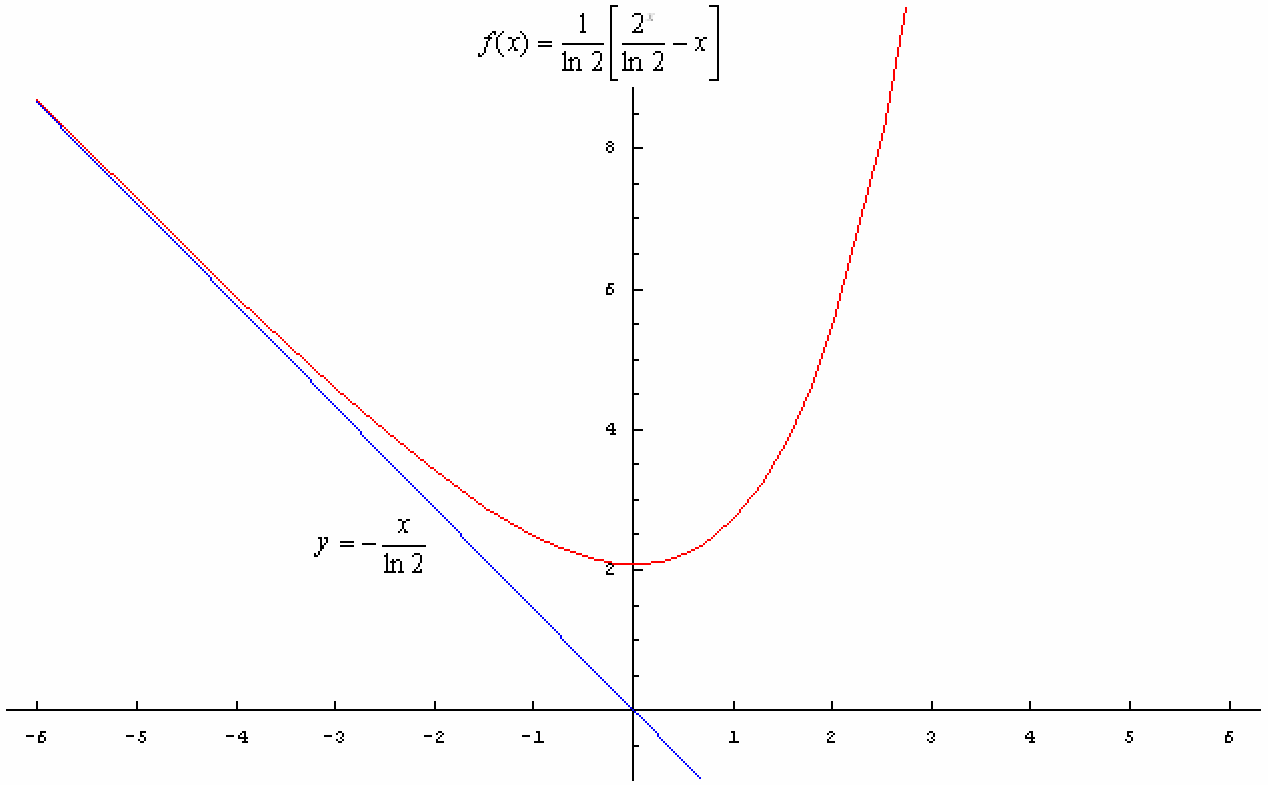
$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + H$$
$$f(x) = \int f'(x)dx = \int\left(\frac{2^x}{\ln 2} + H\right)dx = \frac{2^x}{(\ln 2)^2} + Hx + K$$

Il sistema da risolvere è allora:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2^x}{(\ln 2)^2} + Hx + K \\ f(0) = \left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)^2 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)^2 + K = \left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)^2 \\ \left(\dfrac{1}{\ln 2}\right) + H = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = 0 \\ H = -\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right) \end{cases}$$

da cui $f(x) = \dfrac{2^x}{(\ln 2)^2} + Hx + K = \dfrac{1}{\ln 2}\left[\dfrac{2^x}{\ln 2} - x\right]$.

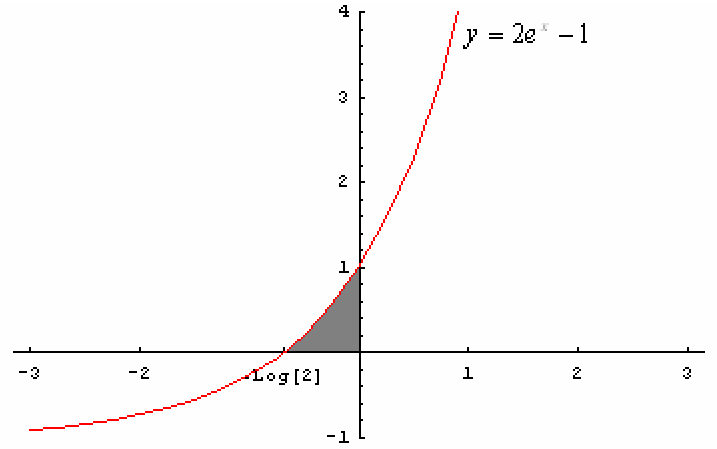
Tale funzione è sempre positiva, ha un asintoto obliquo pari a $y = -\dfrac{x}{\ln 2}$ ed ha un minimo in $\left(0, \dfrac{1}{\ln^2 2}\right)$. Il grafico è sotto presentato:



9. Calcolare l'area della parte finita di piano delimitata dalla curva d'equazione *y=2e*^{x}*-1* e dagli assi cartesiani.

Soluzione

La funzione $y = 2e^x - 1$ interseca l'asse delle ascisse in $(-\ln 2{,}0)$ e quello delle ordinate in (0,1). Essa è positiva per $x > -\ln 2$, ha un asintoto orizzontale pari a $y = -1$, è sempre crescente e non ha flessi. L'area da calcolare è sotto raffigurata in grigio:



L'area è pari a

$$A = \int_{-\ln 2}^{0} \left(2e^x - 1\right)dx = \left[2e^x - x\right]_{-\ln 2}^{0} = 2 - 2e^{-\ln 2} - \ln 2 = 2 - 1 - \ln 2 = 1 - \ln 2$$

10. Definire gli asintoti - orizzontale, obliquo, verticale - di una curva e fornire un esempio di funzione f(x) il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

Soluzione

Asintoto orizzontale:

La retta $y = q$ si definisce asintoto orizzontale per la funzione $y = f(x)$ se è verificata almeno una delle seguenti tre condizioni:

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$;
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$;
- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

Asintoto verticale:

La retta $x = c$ si definisce asintoto verticale per la funzione $y = f(x)$ se è verificata almeno le seguenti tre condizioni:

- $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$, cioè il limite destro è pari o a $+\infty$ o a $-\infty$;
- $\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$, cioè il limite sinistro è pari o a $+\infty$ o a $-\infty$;
- $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$, cioè l'asintoto è destro e sinistro e vale o $+\infty$ o $-\infty$.

Asintoto obliquo:

La retta $y = mx + q$ si definisce asintoto orizzontale per la funzione $y = f(x)$ se è verificata almeno una delle seguenti tre condizioni:

- $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$;
- $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$;
- $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$.

In tal caso $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{[f(x)]}{x}, q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$.

Un esempio di funzione con 1 asintoto orizzontale e 2 verticali è il seguente:

$$y(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

Le caratteristiche di questa funzione sono sotto evidenziate:

- Dominio: $x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$;
- Intersezione asse delle ascisse: $y(x) = \frac{x}{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

- Intersezione asse delle ordinate: $x = 0 \Rightarrow y = 0$;
- Eventuali simmetrie: la funzione è dispari, infatti $y(-x) = \frac{(-x)}{(-x)^2 - 4} = -\frac{x}{x^2 - 4} = -y(x)$;
- Positività: $y(x) = \frac{x}{x^2 - 4} > 0 \Leftrightarrow x \in (-2,0) \cup (2,+\infty)$;
- Asintoti verticali:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x}{x^2 - 4} = +\infty, \lim_{x \to 2^-} \frac{x}{x^2 - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x}{x^2 - 4} = +\infty, \lim_{x \to -2^-} \frac{x}{x^2 - 4} = -\infty$$

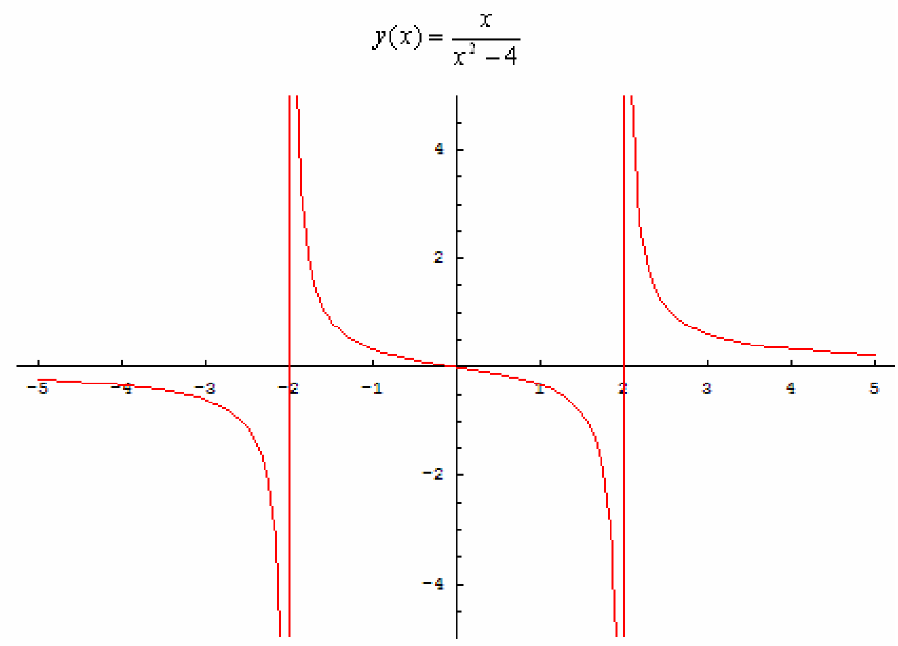
per cui le rette $x = \pm 2$ sono asintoti verticali;

- Asintoti orizzontali : $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 4} = 0$ per cui la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale;
- Asintoti obliqui: non ce ne sono; infatti, se esistessero avrebbero equazione $y = mx + q$,

  ma nel nostro caso $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x}{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2 - 4} = 0$;

- Crescenza e decrescenza: $y'(x) = \frac{x^2 - 4 - 2x^2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-4 - x^2}{(x^2 - 4)^2}$ per cui nel dominio di definizione la funzione $y(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ è sempre decrescente; la derivata seconda è $y''(x) = \frac{2x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ per cui (0,0) è un flesso.

Il grafico è di seguito presentato:


$y(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$
4
2
-2
-4
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5