Maturità Scientifica 2002-03

Sessione Ordinaria

Tempo concesso: 5 ore

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario.

Problema 1.

Si consideri un tetraedro regolare T di vertici A, B, C, D.

(a) Indicati rispettivamente con V ed S il volume e l'area totale di T e con r il raggio della sfera inscritta in T, trovare una relazione che leghi V , S ed r.

(b) Considerato il tetraedro regolare T' avente per vertici i centri delle facce di T, calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di T e T' e il rapporto fra i volumi di T e T'.

(c) Condotto un piano α contenente la retta AB e perpendicolare alla retta CD nel punto E e posto che uno spigolo di T sia lungo s, calcolare la distanza di E dalla retta AB.

(d) Considerata nel piano α la parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B ed E, riferire questo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di p.

(e) Determinare per quale valore di s la regione piana determinata dalla parabola e dalla retta EA ha area $\frac{\sqrt{2}}{3}\ cm^2$.

Problema 2.

É assegnata la funzione

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2+m+|m|}$$

dove *m* è un parametro reale.

(a) Determinare il suo dominio di derivabilità.

(b) Calcolare per quale valore di m la funzione ammette una derivata che risulti nulla per $x=1$.

(c) Studiare la funzione $f(x)$ corrispondente al valore di m così trovato e disegnare il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo avere stabilito quanti sono esattamente i flessi di ed avere fornito una spiegazione esauriente di ciò.

(d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico, dall'asse x e dalla retta di equazione $x=1$.

QUESTIONARIO

1. Dopo avere fornito una definizione di rette sghembe, si consideri la seguente proposizione: «Comunque si prendano nello spazio tre rette x, y, z, due a due distinte, se x ed y sono sghembe e, così pure, se sono sghembe y e z allora anche x e z sono sghembe». Dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2. Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide.

3. Dal punto A, al quale è possibile accedere, è visibile il punto B, al quale però non si può accedere in alcun modo, così da impedire la misura diretta della distanza AB. Dal punto A si può però accedere al punto P, dal quale, oltre ad A, è visibile B in modo che, pure rimanendo impossibile misurare direttamente la distanza PB, è tuttavia possibile misurare la distanza AP. Disponendo degli strumenti di misura necessari e sapendo che P non è allineato con A e con B, spiegare come si può utilizzare il teorema dei seni per calcolare la distanza AB.

4. Il dominio della funzione $f(x)=\log\left[\sqrt{x+1}-(x-1)\right]$ è l'insieme degli x reali tali che:

(A) $-1<x\leq 3$

(B) $-1\leq x<3$

(C) $0<x\leq 3$

(D) $0\leq x<3$

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta effettuata.

5. La funzione $f(x)=2x^3-3x^2+2$ ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse. Fornire un'esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo.

6. La derivata della funzione $f(x)=\int_0^{x^2} e^{-t^2}dt$ è la funzione $f(x)=2xe^{-x^4}$ Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.

7. Considerati i primi n numeri naturali a partire da 1: $1,2,3,\ldots,n-1,n$ moltiplicarli combinandoli in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a :

(A) $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

(B) $\frac{1}{3}n(n^2-1)$

(C) $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)(3n+1)$

(D) $\frac{1}{3}n(n^2-1)(3n+2)$

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

8. x ed y sono due numeri naturali dispari tali che x - y = 2. Il numero x^3-y^3 :

(A) è divisibile per 2 e per 3.

(B) è divisibile per 2 ma non per 3.

(C) è divisibile per 3 ma non per 2.
(D) non è divisibile né per 2 né per 3.
Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

9. Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90.

10. Il valore dell'espressione $\log_2 3 \cdot \log_3 2$ è 1. Dire se questa affermazione è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

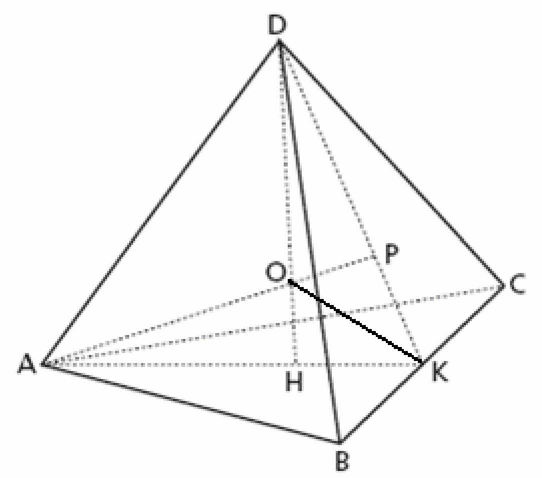
PROBLEMA 1

Si consideri un tetraedro regolare T di vertici A, B, C, D.

Punto (a)

Indicati rispettivamente con V ed S il volume e l'area totale di T e con r il raggio della sfera inscritta in T, trovare una relazione che leghi V , S ed r.

Si consideri la figura seguente:



Le facce del tetraedro sono triangoli equilateri, per cui le altezze AK e DK sono anche mediane e bisettrici. Indicato con *s* lo spigolo del tetraedro T se ne deduce che:

$$DK = AK = s\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AH = \frac{2}{3}AK = s\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$HK = \frac{1}{3}AK = s\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$DH = \sqrt{DK^2 - HK^2} = s\sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{12}} = s\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Il volume del tetraedro sarà allora $V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot DH = \frac{1}{3} \cdot \left(s^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot \left(s\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{12}s^3$ e la superficie totale $S = 4 \cdot S_{ABC} = 4 \cdot \left(s^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = s^2\sqrt{3}$

Ricordando che il punto di incontro delle tre altezze del tetraedro è il centro della sfera inscritta, si ha $OH = OP = r$. I triangoli OHK e KOP sono congruenti per cui OK funge da bisettrice dell'angolo $H\hat{K}P$.

In tal modo $r = HK\tan\left(H\hat{K}O\right) \Rightarrow \tan\left(H\hat{K}O\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{r}{s}\right)$. I

Inoltre $DH = HK\tan\left(2H\hat{K}O\right) \Rightarrow \tan\left(2H\hat{K}O\right) = 2\sqrt{2}$ e ricordando che $\tan\left(2H\hat{K}O\right) = \frac{2\tan\left(H\hat{K}O\right)}{1-\tan^2\left(H\hat{K}O\right)}$

si ha $2\sqrt{2} = \frac{2\cdot\tan\left(H\hat{K}O\right)}{1-\tan^2\left(H\hat{K}O\right)} \xrightarrow{\tan\left(H\hat{K}O\right)\neq\pm1} \sqrt{2}\tan^2\left(H\hat{K}O\right) + \tan\left(H\hat{K}O\right) - \sqrt{2} = 0$ da cui

$\tan\left(H\hat{K}O\right) = \frac{-1\pm 3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \tan\left(H\hat{K}O\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan\left(H\hat{K}O\right) = -\sqrt{2}$; escludendo la soluzione negativa, si ha

$\tan\left(H\hat{K}O\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ da cui $\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{\tan\left(H\hat{K}O\right)}{2\sqrt{3}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow s = r\cdot 2\sqrt{6}$.

Riscriviamo il volume e la superficie totale in funzione del raggio:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}\left(r\cdot 2\sqrt{6}\right)^3 = 8\sqrt{3}\cdot r^3$$

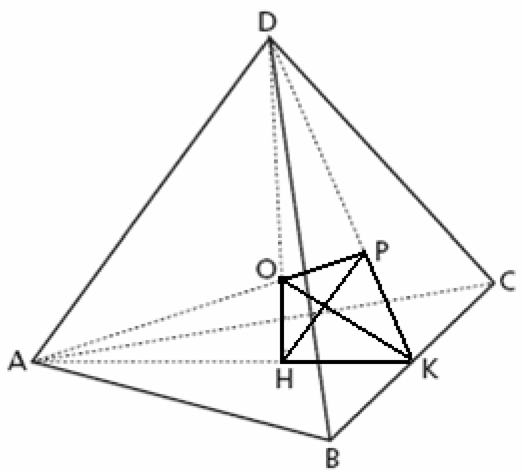
$$S = 4\cdot S_{ABC} = 4\cdot\left(s^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \left(r\cdot 2\sqrt{6}\right)^2\sqrt{3} = 24\sqrt{3}\cdot r^2$$

da cui si deduce che $V = \frac{1}{3}\cdot S\cdot r$

Punto (b)

Considerato il tetraedro regolare T' avente per vertici i centri delle facce di T, calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di T e T' e il rapporto fra i volumi di T e T'.

Si consideri la figura seguente:



Per calcolare il rapporto tra i volumi, basta calcolare lo spigolo del tetraedro POHK in quanto il rapporto tra i volumi non è altro che il rapporto tra i cubi degli spigoli.

Per il teorema di Carnot

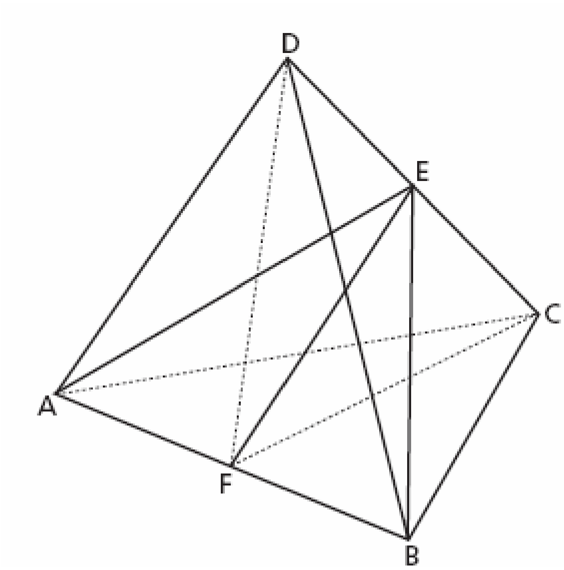
$$HP = \sqrt{OH^2 + OP^2 - 2OH \cdot OP \cdot \cos\left(H\hat{O}P\right)} = \sqrt{2r^2 - 2r^2 \cdot \cos\left(\pi - 2H\hat{K}P\right)} =$$
$$= \sqrt{2r^2 + 2r^2 \cdot \cos\left(2H\hat{K}P\right)} == \sqrt{2r^2 \cdot \left[1 + \cos\left(2H\hat{K}P\right)\right]} = 2r\cos\left(H\hat{K}P\right) =$$
$$= 2r \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\left(H\hat{K}P\right)}} = 2r \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot r \overset{s=r\cdot 2\sqrt{6}}{=} \frac{s}{3}$$

Il rapporto tra i volumi è allora $\frac{V}{V'} = \frac{\left(s^3\right)}{\left(\frac{s^3}{27}\right)} = 27$.

Punto (c)

Condotto un piano α contenente la retta AB e perpendicolare alla retta CD nel punto E e posto che uno spigolo di T sia lungo s, calcolare la distanza di E dalla retta AB.

Si consideri la figura seguente:



F è il punto medio di AB per cui DF ed FC sono le mediane di ABD ed ABC, per cui il triangolo DFC è isoscele e l'altezza EF è anche mediana. Quindi E è il punto medio di DC. Ora AE ed EB sono mediane di ADC e BDC per cui AEB è isoscele ed EF è anche altezza oltre ad essere mediana.

Quindi $EF = \sqrt{AE^2 - AF^2} = s\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = s \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Punto (d)

Considerata nel piano α la parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B ed E, riferire questo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di p.

Consideriamo il sistema di riferimento con origine coincidente col punto F.

In tal modo $A=\left(-\frac{s}{2},0\right), B=\left(\frac{s}{2},0\right), E=\left(0,\frac{s\sqrt{2}}{2}\right)$.

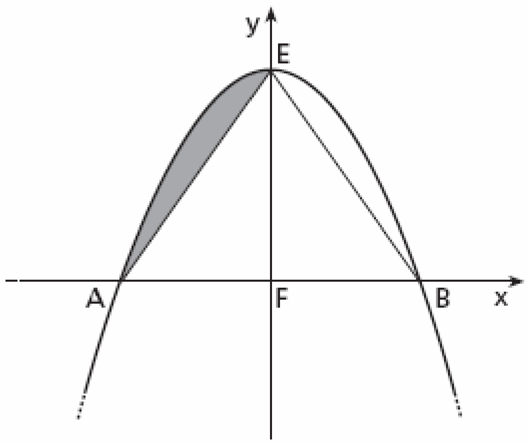
L'equazione generica della parabola è $y=ax^2+bx+c$ per cui imponendo il passaggio per i tre punti si ha:

$$\begin{cases} a\left(\frac{s^2}{4}\right)+b\left(-\frac{s}{2}\right)+c=0 \\ a\left(\frac{s^2}{4}\right)+b\left(\frac{s}{2}\right)+c=0 \\ c=\frac{s\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\left(\frac{s^2}{4}\right)+c=0 \\ 2b\left(\frac{s}{2}\right)=0 \\ c=\frac{s\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{2\sqrt{2}}{s} \\ b=0 \\ c=\frac{s\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow y=-\frac{2\sqrt{2}}{s}x^2+\frac{s\sqrt{2}}{2}$$

Punto (e)

Determinare per quale valore di s la regione piana determinata dalla parabola e dalla retta EA ha area $\frac{\sqrt{2}}{3}\ cm^2$.

Si consideri la figura seguente in cui l'area da calcolare è raffigurata in grigio:



L'area del segmento parabolico, vista la simmetria è la semidifferenza tra l'area del segmento parabolico AEB ed il triangolo AEB. L'area del segmento parabolico AEB è, per il teorema di Archimede, i $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo circoscritto e cioè $S_{sett.par,AEB}=\frac{2}{3}\cdot(AB\cdot EF)=\frac{2}{3}\cdot\left(s\cdot\frac{s\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}s^2$. L'area del triangolo AEB è

$S_{AEB} = \frac{1}{2} \cdot (AB \cdot EF) = \frac{1}{2} \cdot \left(s \cdot \frac{s\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} s^2$ per cui l'area cercata è $S = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3} s^2 - \frac{\sqrt{2}}{4} s^2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{24} s^2$.

Imponendo $S = \frac{\sqrt{2}}{24} s^2 = \frac{\sqrt{2}}{3}$ si ha $s = \left(2\sqrt{2}\right) cm$.

PROBLEMA 2

É assegnata la funzione

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2 + m + |m|}$$

dove *m* è un parametro reale.

Punto (a)

Determinare il suo dominio di derivabilità.

La funzione può essere riscritta nel seguente modo:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2 + m + |m|} = \begin{cases} \frac{2x+1}{x^2} & m \le 0 \\ \frac{2x+1}{x^2 + 2m} & m > 0 \end{cases}$$

La derivata è:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2(x+1)}{x^3} & m \le 0 \\ \frac{-2(x^2 + x - 2m)}{(x^2 + 2m)^2} & m > 0 \end{cases}$$

Quindi $f(x)$ è derivabile $\begin{cases} \forall x \in R - \{0\} & m \le 0 \\ \forall x \in R & m > 0 \end{cases}$

Punto (b)

Calcolare per quale valore di m la funzione ammette una derivata che risulti nulla per $x = 1$.

$$f'(1) = \begin{cases} -4 & m \le 0 \\ \frac{4(m-1)}{(1+2m)^2} & m > 0 \end{cases}$$

per cui $f'(1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$ accettabile in quanto $m > 0$.

Punto (c)

Studiare la funzione $f(x)$ corrispondente al valore di m così trovato e disegnare il grafico in

un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo avere stabilito quanti sono esattamente i flessi di ed avere fornito una spiegazione esauriente di ciò.

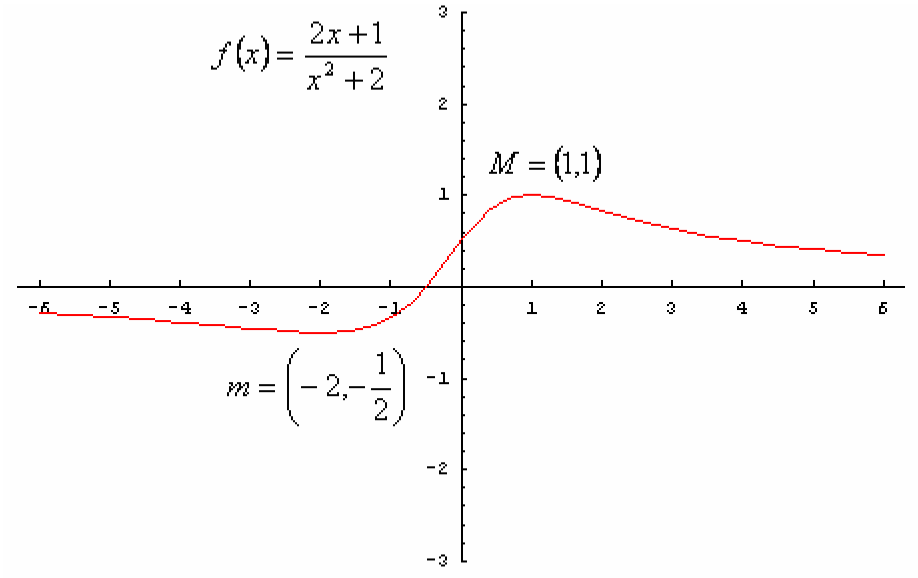
La curva in esame è $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$. Studiamola.

- *Dominio:* $\forall x \in R$ cioè $D = (-\infty, +\infty)$*;*
- *Intersezioni asse ascisse:* $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2} = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$;
- *Intersezioni asse ordinate:* $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$*;*
- *Positività:* $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2} > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$;
- *Asintoti verticali:* non esistono asintoti verticali in quanto il dominio è tutto R;
- *Asintoti orizzontali:* la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale: infatti $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x+1}{x^2+2} = 0$;
- *Asintoti obliqui:* la presenza di asintoti orizzontali per una funzione razionale fratta esclude la presenza degli asintoti obliqui*;*
- *Crescenza e decrescenza:* la derivata prima è $f'(x) = \frac{-2(x^2+x-2)}{(x^2+2)^2}$ per cui

  $f'(x) = \frac{-2(x^2+x-2)}{(x^2+2)^2} > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$;
- *Flessi:* la derivata seconda è $f''(x) = \frac{2(2x^3+3x^2-12x-2)}{(x^2+2)^3}$ per cui

  $f''(1) = -\frac{2}{3} < 0, f''(-2) = \frac{1}{6} > 0$ per cui $M = (1,1)$ è un massimo e $m = \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ è un minimo. Inoltre si può dimostrare (ad esempio graficamente come intersezione della cubica $y = 2x^3 + 3x^2$ con la retta $y = 12x + 2$) che la funzione ammette tre flessi come preannunciano i valori assunti agli estremi del dominio ed i valori dei massimi.

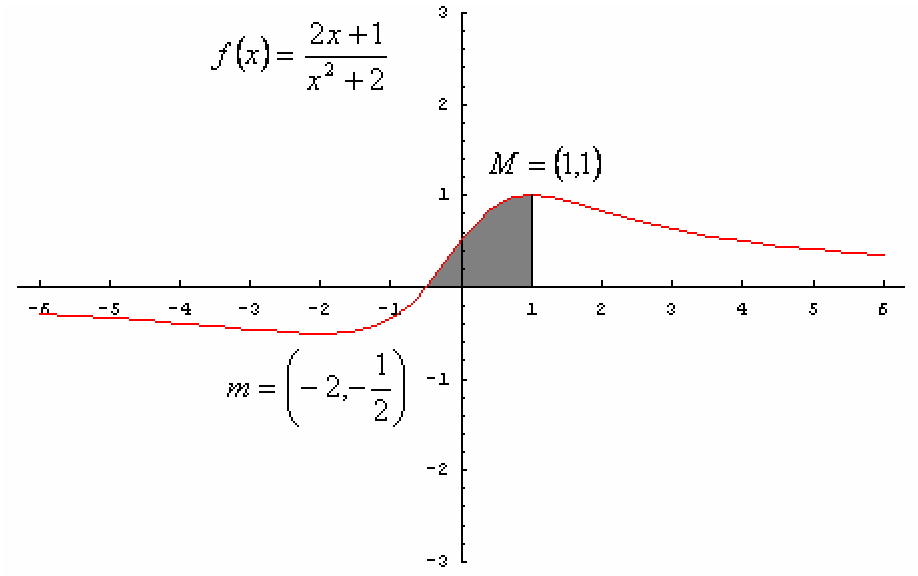
Il grafico è sotto presentato:



Punto (d)

Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico, dall'asse x e dalla retta di equazione $x=1$.

L'area da determinare è sotto presentata:



e vale:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{2x+1}{x^2+2}dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{2x}{x^2+2}dx+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}dx=$$

$$=\left[\ln\left(x^2+2\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}=$$

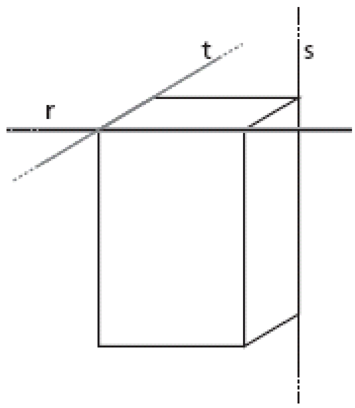
$$=\ln 3-\ln\left(\frac{9}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\arctan\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right]=$$

$$=\ln\left(\frac{4}{3}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]$$

QUESTIONARIO

1. Dopo avere fornito una definizione di rette sghembe, si consideri la seguente proposizione: «Comunque si prendano nello spazio tre rette x, y, z, due a due distinte, se x ed y sono sghembe e, così pure, se sono sghembe y e z allora anche x e z sono sghembe». Dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

Due rette si dicono *sghembe* se non giacciono su uno stesso piano. La proposizione è falsa in quanto non vale la proprietà transitiva. Consideriamo ad esempio la figura seguente, raffigurante un parallelepipedo:



Entrambe le coppie di rette (r,s) ed (s,t) sono sghembe, ma le rette (r,t) non lo sono visto che si incontrano in uno spigolo del parallelepipedo.

2. Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide.

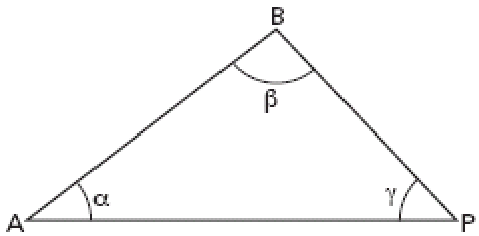
Si possono avere i seguenti casi:

1. Se il piano è parallelo al quadrato di base si ottiene un quadrato;

2. Se il piano è parallelo a un lato del quadrato di base si ottiene un trapezio isoscele in quanto si ha un quadrilatero con due lati paralleli e due non;
3. Se il piano è parallelo a una diagonale del quadrato di base si ottiene un romboide.

3. Dal punto A, al quale è possibile accedere, è visibile il punto B, al quale però non si può accedere in alcun modo, così da impedire la misura diretta della distanza AB. Dal punto A si può però accedere al punto P, dal quale, oltre ad A, è visibile B in modo che, pure rimanendo impossibile misurare direttamente la distanza PB, è tuttavia possibile misurare la distanza AP. Disponendo degli strumenti di misura necessari e sapendo che P non è allineato con A e con B, spiegare come si può utilizzare il teorema dei seni per calcolare la distanza AB.

Si consideri la figura seguente:



Si misura direttamente AP e poi con un goniometro si misurano gli angoli α, γ cui è possibile accedere direttamente da cui si calcola $\beta = \pi - \alpha - \gamma$. Per il teorema dei seni $\frac{AP}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\gamma} \Rightarrow AB = AP\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$.

4. Il dominio della funzione $f(x) = \log\left[\sqrt{x+1} - (x-1)\right]$ **è l'insieme degli x reali tali che:**
(A) $-1 < x \le 3$
(B) $-1 \le x < 3$
(C) $0 < x \le 3$
(D) $0 \le x < 3$
Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta effettuata.

Il dominio della funzione $f(x) = \log\left[\sqrt{x+1} - (x-1)\right]$ è $D = \begin{cases} \sqrt{x+1} - (x-1) > 0 \\ x+1 \ge 0 \end{cases}$.

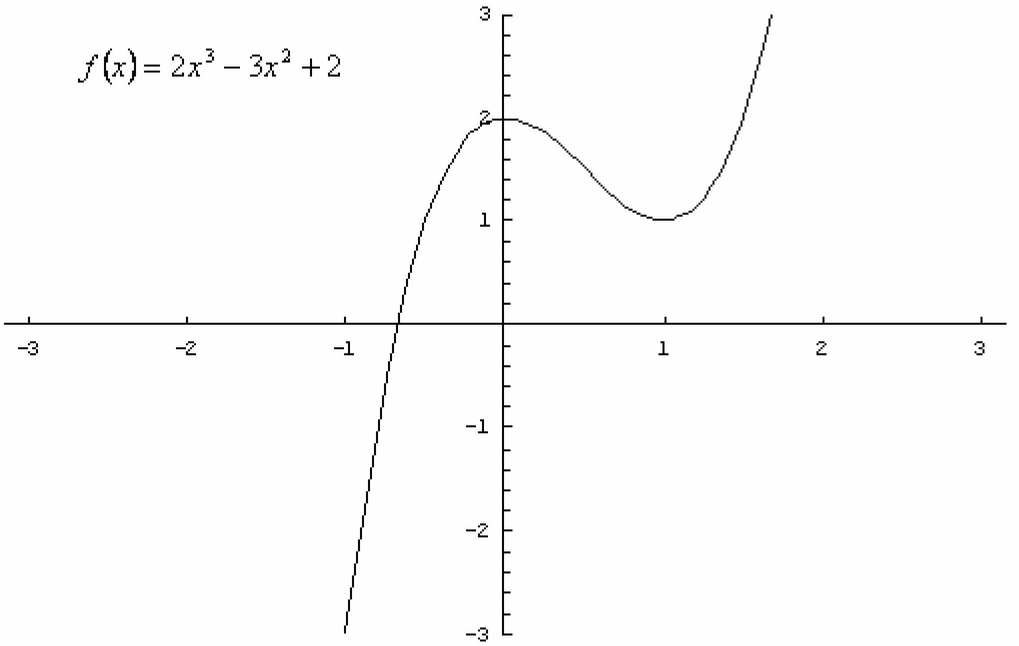
Risolviamo innanzitutto la disequazione irrazionale $\sqrt{x+1} > (x-1)$. Le soluzioni di tale disequazione sono date dall'unione dei due sistemi seguenti:

$$\begin{cases} (x-1) < 0 \\ x+1 \ge 0 \end{cases} \cup \begin{cases} (x-1) \ge 0 \\ x+1 > (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \ge -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x \ge 1 \\ x^2 - 3x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{-1 \le x < 1\} \cup \{1 \le x < 3\} \Leftrightarrow -1 \le x < 3$$

Il dominio della funzione $f(x) = \log\left[\sqrt{x+1} - (x-1)\right]$ è allora $D = \begin{cases} -1 \le x < 3 \\ x \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow D = [-1,3[$ e cioè la risposta giusta è la B.

5. La funzione $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$ ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse. Fornire un'esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo.

La funzione $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$ è definita su tutto l'asse reale, è tale che $\lim_{x\to\pm\infty}\left(2x^3 - 3x^2 + 2\right) = \pm\infty$, non ha asintoti, ha derivata prima $f'(x) = 6x(x-1)$ e derivata seconda $f'(x) = 6(2x-1)$; quindi la derivata prima è positiva per $x < 0 \vee x > 1$ mentre la derivata seconda si annulla per $x = \frac{1}{2}$. Quindi la cubica ha un massimo in (0,2) ed un minimo in (1,1) ed un flesso in $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Visti i valori assunti agli estremi del dominio ed i valori assunti dagli estremi relativi, si può dedurre che la funzione si annulla in un solo punto ad ascissa negativa così come evidenziato dal grafico della cubica:



6. La derivata della funzione $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$ è la funzione $f(x) = 2xe^{-x^4}$. Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.

La funzione $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$, posto $g(x) = x^2$, può essere pensata come una funzione composta $f(g(x)) = \int_0^{g(x)} e^{-t^2} dt$ la cui derivata è $f'(g(x)) = g'(x) \cdot f'(g(x))$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale $f'(g(x))=e^{-[g(x)]^2}=e^{-x^4}$, mentre $g'(x)=2x$ da cui $f'(g(x))=2x\cdot e^{-x^4}$.

7. Considerati i primi n numeri naturali a partire da 1: $1,2,3,\dots,n-1,n$ **moltiplicarli combinandoli in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a:**

(A) $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

(B) $\frac{1}{3}n(n^2-1)$

(C) $\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$

(D) $\frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2)$

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

Ricordando l'espressione del quadrato di un polinomio, si ha:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)+2\left(\sum_{h\neq k}hk\right)\Rightarrow\left(\sum_{h\neq k}hk\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)\right]$$

Ora ricordando che $\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ e che $\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ si ha:

$$\left(\sum_{h\neq k}hk\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{6n^2(n+1)^2-4n(n+1)(2n+1)}{24}\right]=\frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2)$$

per cui la risposta corretta è la D.

8. x ed y sono due numeri naturali dispari tali che x - y = 2. Il numero x^3-y^3 **:**

(A) è divisibile per 2 e per 3.

(B) è divisibile per 2 ma non per 3.

(C) è divisibile per 3 ma non per 2.

(D) non è divisibile né per 2 né per 3.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

Si ha:

$$\begin{aligned}x^3-y^3&=(x-y)(x^2+xy+y^2)\overset{x-y=2}{=}2\left[(y+2)^2+y(y+2)+y^2\right]=\\&=2\left[3y^2+6y+4\right]=2\left[3(y+1)^2+1\right]\end{aligned}$$

Certamente da come è stata riscritta la differenza dei cubi con $(x-y)=2$, si deduce che il numero x^3-y^3 è divisibile per 2; inoltre $\left[3(y+1)^2+1\right]$ non è divisibile per 3. Quindi la risposta corretta è B.

9. Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90.

Si tratta di determinare le possibili combinazioni di tre oggetti su 88 (ai 90 numeri vanno sottratti i numeri 1 e 90). Per cui le possibili cinquine sono $\binom{88}{3} = \frac{88!}{3! \cdot 85!} = \frac{86 \cdot 87 \cdot 88}{6} = 43 \cdot 29 \cdot 88 = 109736$.

10. Il valore dell'espressione $\log_2 3 \cdot \log_3 2$ è 1. Dire se questa affermazione è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

Per il teorema di cambiamento di base $\log_3 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 3} = \frac{1}{\log_2 3}$ per cui

$$\log_2 3 \cdot \log_3 2 = \log_2 3 \cdot \frac{1}{\log_2 3} = 1.$$