

SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO
ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Sessione Ordinaria 2003
Calendario australe
SECONDA PROVA SCRITTA
Tema di Matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche (x,y) , studiate la curva G di equazione:

$$y = \frac{x^3}{(2x-1)^2}$$

1. Tracciatene il grafico e denotate con s il suo asintoto obliquo.
2. Indicate con A e B i punti in cui s incontra rispettivamente l'asse y e la curva G . Sul segmento AB prendete un punto P in modo che, detto Q il punto di G avente la stessa ascissa di P , sia massima l'area del triangolo APQ .
3. Determinate l'area della regione finita di piano delimitata da G e dalla bisettrice del primo e terzo quadrante.
4. Determinate l'equazione della curva S simmetrica di G rispetto alla bisettrice del II e IV quadrante.

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali e monometriche (x, y) , siano:

S il punto di coordinate $(0,4)$; P un punto della retta r di equazione $2x - y - 2 = 0$; n la retta per S perpendicolare alla congiungente S con P ; Q il punto di intersezione di n con la retta s parallela per P all'asse y .

Trovate l'equazione cartesiana del luogo G descritto da Q al variare di P su r .

Studiate G , disegnatene il grafico e spiegate con considerazioni geometriche quanto si riscontra, analiticamente, per $x=3$

Si calcoli l'area della regione di piano racchiusa tra G , il suo asintoto obliquo, l'asse y e la retta $x=2$

Si trovi l'equazione del luogo K simmetrico di G rispetto alla retta $x=2$

QUESTIONARIO

1. Quale è il dominio della funzione $f(x) = x^\pi - \pi^x$? Quale ne è il segno della derivata prima e quale quello della derivata seconda nel punto $x = \pi$?
2. Calcolate il rapporto tra la superficie totale di un cilindro equilatero e la superficie della sfera ad esso circoscritta.
3. Dimostrate che

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

4. Dimostrate che la somma di qualsiasi numero reale positivo e del suo reciproco è almeno 2
5. I gradi sessagesimali, i radianti e i gradi centesimali sono le più comuni unità per la misura degli angoli. Date di ciascuna di esse una esauriente definizione.
6. Sia APB un angolo la cui misura in radianti è data dal numero e di Nepero, base dei logaritmi naturali. Quale è la misura in gradi sessagesimali di APB e quale quella in gradi centesimali? Motivate la vostra risposta.
7. Calcolate la derivata della funzione

$$f(x) = \arctan x - \arctan \frac{x-1}{x+1}$$

Quali conclusioni ne potete trarre per la $f(x)$? La funzione è una costante? Se sì, quale è la costante?

8. Verificate che la funzione: $y = e^{-x} + x^{-1}$ è invertibile e detta g la funzione inversa, calcolate $g'(1 + e^{-1})$.

Durata massima della prova : 6 ore

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

E' consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.

PROBLEMA 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche (x,y), studiate la curva G di equazione:

$$y = \frac{x^3}{(2x-1)^2}$$

Punto 1

Tracciatene il grafico e denotate con s il suo asintoto obliquo.

Studiamo la funzione $y = \frac{x^3}{(2x-1)^2}$

✚ *Dominio:* $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$;

✚ *Intersezioni asse ascisse:* $y = \frac{x^3}{(2x-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$;

✚ *Intersezioni asse ordinate:* $x = 0 \Rightarrow y = 0$;

✚ *Positività:* $y = \frac{x^3}{(2x-1)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^3 > 0 \\ (2x-1)^2 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \forall x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

✚ *Asintoti verticali:* $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^{\pm}} \frac{x^3}{(2x-1)^2} = +\infty$ per cui $x = \frac{1}{2}$ è asintoto verticale;

✚ *Asintoti orizzontali:* non ve ne sono in quanto $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{(2x-1)^2} = \pm\infty$;

✚ *Asintoti obliqui:* hanno equazione $y = mx + q$ con $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^3}{(2x-1)^2}}{x} = \frac{1}{4}$ e

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3}{(2x-1)^2} - \frac{x}{4} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{4x^2 - x}{16x^2 - 16x + 4} \right] = \frac{1}{4}$$
 per cui l'asintoto

obliquo ha equazione $s : y = \frac{x+1}{4}$;

✚ *Crescenza e decrescenza:* la derivata prima della funzione è:

$$y' = \frac{3x^2(2x-1)^2 - 4x^3(2x-1)}{(2x-1)^4} = \frac{x^2(2x-3)}{(2x-1)^3}$$
 per cui

$$y' = \frac{x^2(2x-3)}{(2x-1)^3} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2(2x-3) > 0 \\ (2x-1)^3 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) \text{ per cui la}$$

funzione è strettamente crescente in $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ e strettamente decrescente altrove.

 **Concavità e convessità:** la derivata seconda è

$$y'' = \frac{(6x^2 - 6x)(2x-1)^3 - 6(2x^3 - 3x^2)(2x-1)^2}{(2x-1)^6} = \frac{6x}{(2x-1)^4} > 0 \Rightarrow x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \text{ per}$$

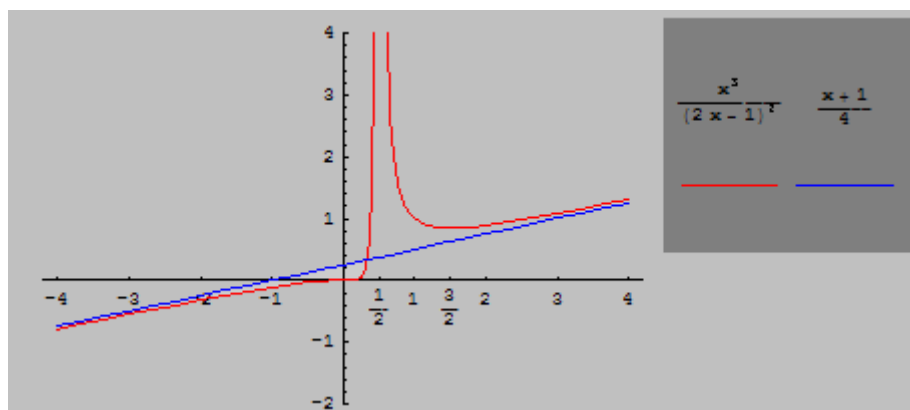
cui la funzione presenta concavità verso l'alto in $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Dall'analisi della derivata

terza, $y''' = \frac{-6(6x+1)}{(2x-1)^5}$, deduciamo che $y'''(0) = 6 \neq 0$ per cui in $(0,0)$ la funzione

presenterà un flesso a tangente orizzontale. Inoltre $y''\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{16} > 0$ per cui $\left(\frac{3}{2}, \frac{27}{32}\right)$ è un

minimo relativo.

Il grafico è di seguito presentato:



Come ricavato precedentemente l'asintoto obliquo ha equazione $s: y = \frac{x+1}{4}$.

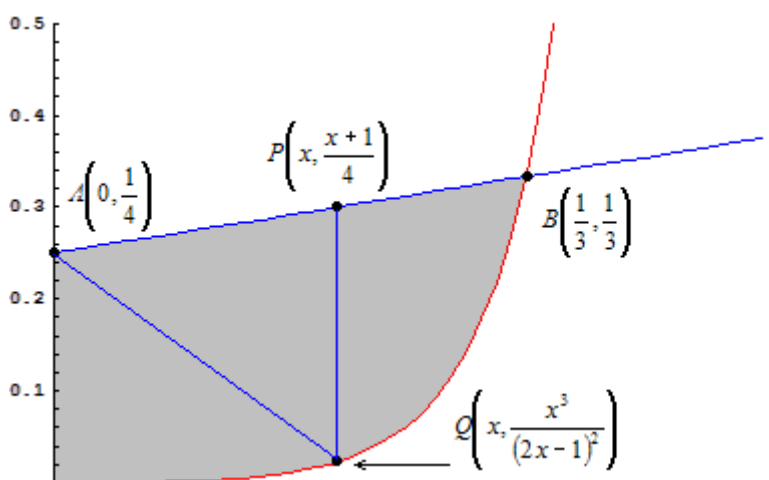
Punto 2

Indicate con A e B i punti in cui s incontra rispettivamente l'asse y e la curva G . Sul segmento AB prendete un punto P in modo che, detto Q il punto di G avente la stessa ascissa di P, sia massima l'area del triangolo APQ.

L'asintoto $s: y = \frac{x+1}{4}$ incontra l'asse delle ordinate in $A\left(0, \frac{1}{4}\right)$. Per calcolare l'intersezione dell'asintoto con la curva dobbiamo risolvere l'equazione $\frac{x^3}{(2x-1)^2} = \frac{x+1}{4} \rightarrow 4x^3 = 4(2x-1)^2(x+1) \rightarrow 4x^3 = 4x^3 - 3x + 1 \rightarrow x = \frac{1}{3}$ da cui $B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

La retta AB ha equazione $s: y = \frac{x+1}{4}$ per cui il punto P avrà coordinate generiche $P\left(x, \frac{x+1}{4}\right)$

mentre $Q\left(x, \frac{x^3}{(2x-1)^2}\right)$ con $0 < x < \frac{1}{3}$. La figura seguente evidenzia la geometria del problema.



Il triangolo APQ ha base PQ ed altezza pari alla proiezione di $A\left(0, \frac{1}{4}\right)$ sulla retta PQ. In particolare

$$\overline{PQ} = \left| \frac{x+1}{4} - \frac{x^3}{(2x-1)^2} \right| = \left| \frac{1-3x}{4(2x-1)^2} \right| \xrightarrow{0 < x < \frac{1}{3}} \overline{PQ} = \frac{1-3x}{4(2x-1)^2}, \quad \text{mentre l'altezza misura}$$

$$h = |x_Q - x_A| = |x_Q| = |x| \xrightarrow{0 < x < \frac{1}{3}} h = x \quad \text{per cui l'area del triangolo APQ vale}$$

$$S = \frac{\overline{PQ} \cdot h}{2} = \frac{x(1-3x)}{8(2x-1)^2}. \quad \text{La massimizzazione dell'area del triangolo APQ la effettuiamo mediante}$$

derivazione. La derivata prima di $S = \frac{x(1-3x)}{8(2x-1)^2}$ è $S' = \frac{(4x-1)}{8(2x-1)^3}$ per cui nell'intervallo $0 < x < \frac{1}{3}$

la funzione è strettamente crescente in $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ e strettamente decrescente in $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$; inoltre la

derivata seconda è $S'' = \frac{(1-8x)}{4(2x-1)^4}$ per cui $S''\left(\frac{1}{4}\right) = -4 < 0$ per cui l'area massima la si ha per $x = \frac{1}{4}$ cui corrispondono $P\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{16}\right), Q\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$ e $S_{\max} = S\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{32}$.

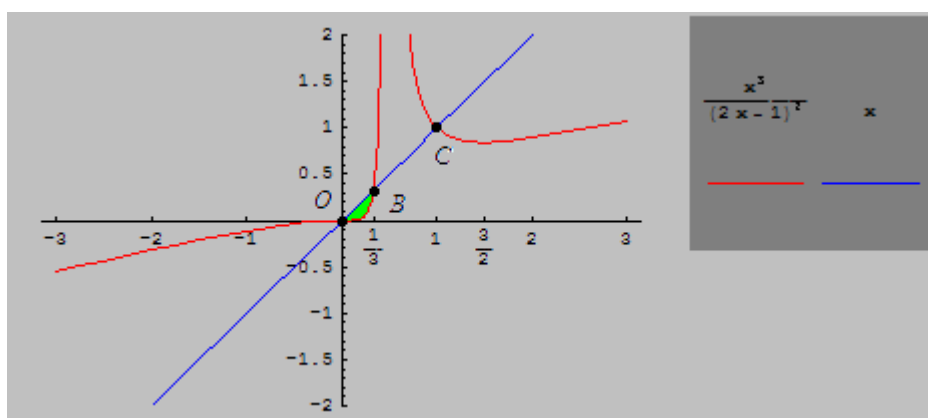
Punto 3

Determinate l'area della regione finita di piano delimitata da G e dalla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Intersechiamo la curva di equazione $y = \frac{x^3}{(2x-1)^2}$ con la retta $y = x$ ottenendo:

$$\frac{x^3}{(2x-1)^2} = x \Rightarrow 3x^3 - 4x^2 + x = x(3x-1)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} O(0,0) \\ C(1,1) \\ B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \end{cases}$$

L'area da calcolare è raffigurata in verde nella figura sottostante:



Innanzitutto la funzione $y = \frac{x^3}{(2x-1)^2}$ è scomponibile come

$$y = \frac{x^3}{(2x-1)^2} = \frac{x}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8(2x-1)} + \frac{1}{8(2x-1)^2}.$$

Tale area vale

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{\frac{1}{3}} \left[x - \frac{x^3}{(2x-1)^2} \right] dx = S = \int_0^{\frac{1}{3}} \left[x - \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8(2x-1)} + \frac{1}{8(2x-1)^2} \right) \right] dx = \\
 &= \int_0^{\frac{1}{3}} \left[\frac{3x}{4} - \frac{1}{4} - \frac{3}{8(2x-1)} - \frac{1}{8(2x-1)^2} \right] dx = \\
 &= \left[\frac{3x^2}{8} - \frac{x}{4} - \frac{3}{16} \ln|2x-1| + \frac{1}{16(2x-1)} \right]_0^{\frac{1}{3}} = \\
 &= \left[\frac{1}{24} - \frac{1}{12} - \frac{3}{16} \ln\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{3}{16} \right] - \left[-\frac{1}{16} \right] = -\frac{1}{6} + \frac{3}{16} \ln(3) = \frac{(9\ln 3 - 8)}{48}
 \end{aligned}$$

Punto 4

Determinate l'equazione della curva S simmetrica di G rispetto alla bisettrice del II e IV quadrante.

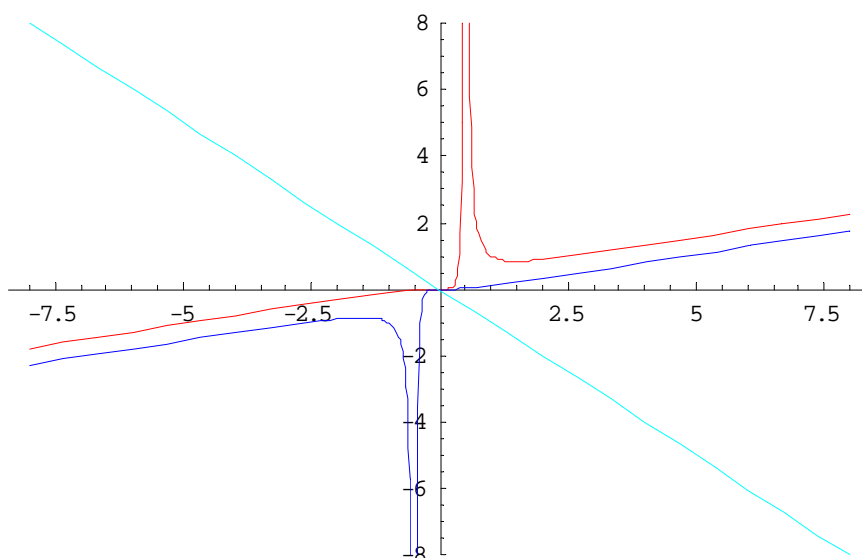
La simmetrica rispetto alla bisettrice del II e IV quadrante si ottiene mediante la trasformazione

seguito: $\begin{cases} X = -y \\ Y = -x \end{cases}$ per cui la curva S ha equazione $S: -X = \frac{(-Y)^3}{[2(-Y)-1]^2} \Rightarrow X = \frac{Y^3}{(2Y+1)^2}$

Il grafico sottostante mostra in rosso il luogo G di equazione $y = \frac{x^3}{(2x-1)^2}$, in blu il luogo S di

equazione $x = \frac{y^3}{(2y+1)^2}$ ed in celeste la bisettrice del secondo e quarto quadrante di equazione

$y = -x$:



PROBLEMA 2

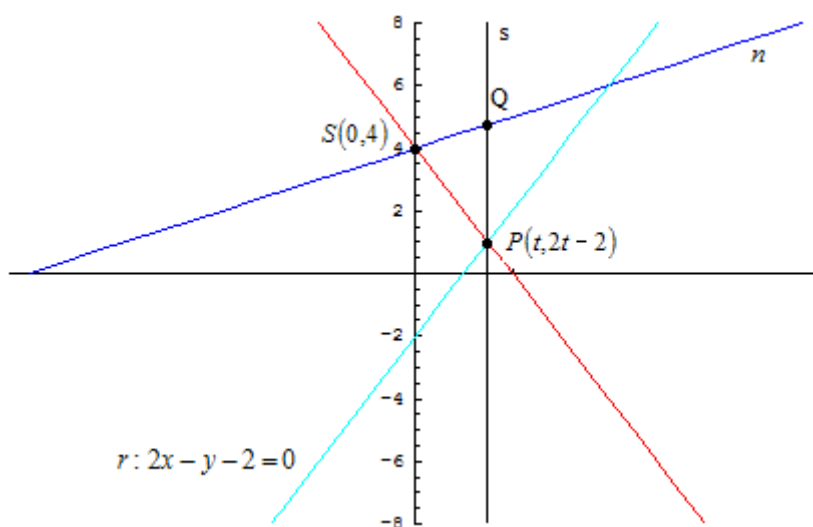
Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali e monometriche (x, y) , siano:

S il punto di coordinate $(0,4)$; P un punto della retta r di equazione $2x - y - 2 = 0$; n la retta per S perpendicolare alla congiungente S con P; Q il punto di intersezione di n con la retta s parallela per P all'asse y .

Punto 1

Trovate l'equazione cartesiana del luogo G descritto da Q al variare di P su r .

Si consideri la figura seguente.



Il punto P, dovendo appartenere alla retta $r: 2x - y - 2 = 0$ ha coordinate $P(t, 2t - 2)$. La retta n passante per $S(0,4)$ ha equazione $y = mx + 4$ dove $m = -\frac{1}{m_{SP}}$ in quanto la retta n è perpendicolare

alla retta SP. Il coefficiente angolare della retta SP è $m_{SP} = \frac{2t - 2 - 4}{t} = \frac{2t - 6}{t}$ per cui la retta n ha

equazione $y = \left(\frac{t}{6 - 2t}\right)x + 4$. La retta s parallela per P all'asse y ha equazione $x = t$ per cui il punto

Q ha coordinate $Q\left(t, \frac{t^2}{6 - 2t} + 4 = \frac{t^2 - 8t + 24}{6 - 2t}\right)$. Posto allora $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2 - 8t + 24}{6 - 2t} \end{cases}$ il luogo G è

$$y = \frac{x^2 - 8x + 24}{6 - 2x}.$$

Punto 2

Studiate G, disegnatene il grafico e spiegate con considerazioni geometriche quanto si riscontra, analiticamente, per $x=3$

Studiamo la funzione $y = \frac{x^2 - 8x + 24}{6 - 2x}$

✚ *Dominio:* $x \in (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$;

✚ *Intersezioni asse ascisse:* non ve ne sono in quanto $y = \frac{x^2 - 8x + 24}{6 - 2x} = 0 \rightarrow x^2 - 8x + 24 = 0$
il cui delta è $\Delta = -32 < 0$;

✚ *Intersezioni asse ordinate:* $x = 0 \Rightarrow y = 4$;

✚ *Positività:* $y = \frac{x^2 - 8x + 24}{6 - 2x} > 0 \Rightarrow \left\| \begin{array}{l} x^2 - 8x + 24 > 0 \\ 6 - 2x > 0 \end{array} \right\| \rightarrow \left\| \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R} \\ x < 3 \end{array} \right\| \Rightarrow x \in (-\infty, 3)$

✚ *Asintoti verticali:* $\lim_{x \rightarrow 3^{\pm}} \frac{x^2 - 8x + 24}{6 - 2x} = \mp \infty$ per cui $x = 3$ è asintoto verticale;

✚ *Asintoti orizzontali:* non ve ne sono in quanto $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 - 8x + 24}{6 - 2x} = \mp \infty$;

✚ *Asintoti obliqui:* hanno equazione $y = mx + q$ con $m = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\frac{x^2 - 8x + 24}{6 - 2x}}{x} = -\frac{1}{2}$ e

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[\frac{x^2 - 8x + 24}{6 - 2x} + \frac{x}{2} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[\frac{-5x + 24}{6 - 2x} \right] = \frac{5}{2} \quad \text{per cui l'asintoto}$$

obliquo ha equazione $y = \frac{-x + 5}{2}$;

✚ *Crescenza e decrescenza:* la derivata prima della funzione è: $y' = \frac{x(6-x)}{2(x-3)^2}$ per cui

$$y' = \frac{x(6-x)}{2(x-3)^2} > 0 \Rightarrow \left\| \begin{array}{l} x(6-x) > 0 \\ (x-3)^2 > 0 \end{array} \right\| \rightarrow \left\| \begin{array}{l} 0 < x < 6 \\ \forall x \neq 3 \end{array} \right\| \Rightarrow x \in (0, 3) \cup (3, 6) \quad \text{per cui la funzione è}$$

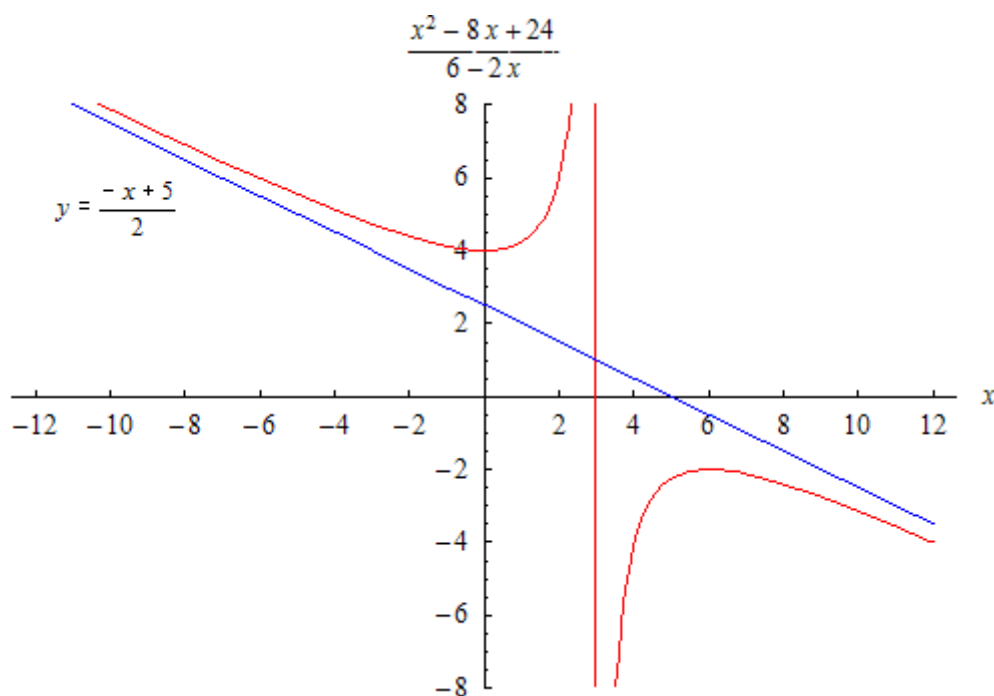
strettamente crescente in $(0, 3) \cup (3, 6)$ e strettamente decrescente altrove.

✚ *Concavità e convessità:* la derivata seconda è $y'' = \frac{9}{(3-x)^3} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 3)$ per cui la

funzione presenta concavità verso l'alto in $(-\infty, 3)$. Inoltre $y''(6) = -\frac{1}{3} < 0$ per cui $(6, -2)$ è un

massimo relativo.

Il grafico è di seguito presentato:



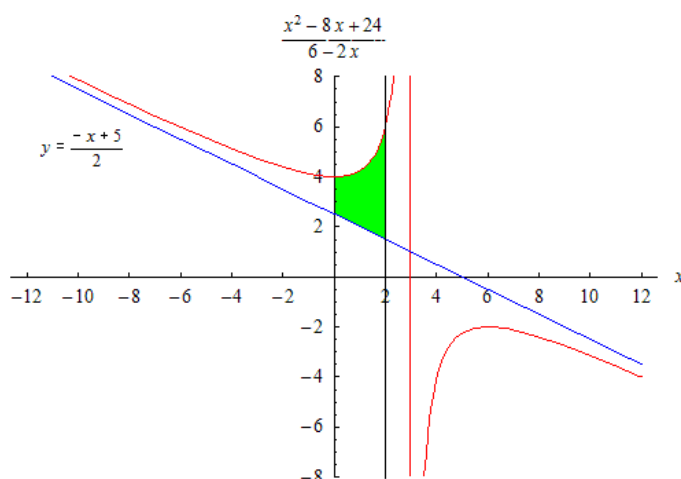
Studiando analiticamente il luogo di equazione $y = \frac{x^2 - 8x + 24}{6 - 2x}$, abbiamo dedotto che esso presenta

$x = 3$ come asintoto verticale e in particolare $\lim_{x \rightarrow 3^\pm} \frac{x^2 - 8x + 24}{6 - 2x} = \mp\infty$; tale situazione corrisponde geometricamente al caso in cui il punto P ha coordinate $P(3,4)$, la retta SP ha equazione $y = 4$ e la normale n ha equazione $x = 0$ e cioè ha un coefficiente angolare infinito; di conseguenza il punto Q avrà un'ordinata infinita.

Punto 3

Si calcoli l'area della regione di piano racchiusa tra G , il suo asintoto obliquo, l'asse y e la retta $x=2$

L'area da calcolare è raffigurata in verde nella figura seguente:



Tale area vale:

$$\int_0^2 \left[\frac{x^2 - 8x + 24}{6 - 2x} - \left(\frac{-x + 5}{2} \right) \right] dx = \int_0^2 \left[\left(\frac{-x + 5}{2} + \frac{9}{6 - 2x} \right) - \left(\frac{-x + 5}{2} \right) \right] dx$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{9}{6 - 2x} \right) dx = \left[-\frac{9}{2} \ln|6 - 2x| \right]_0^2 = -\frac{9}{2} \ln 2 + \frac{9}{2} \ln 6 = \frac{9}{2} \ln 3$$

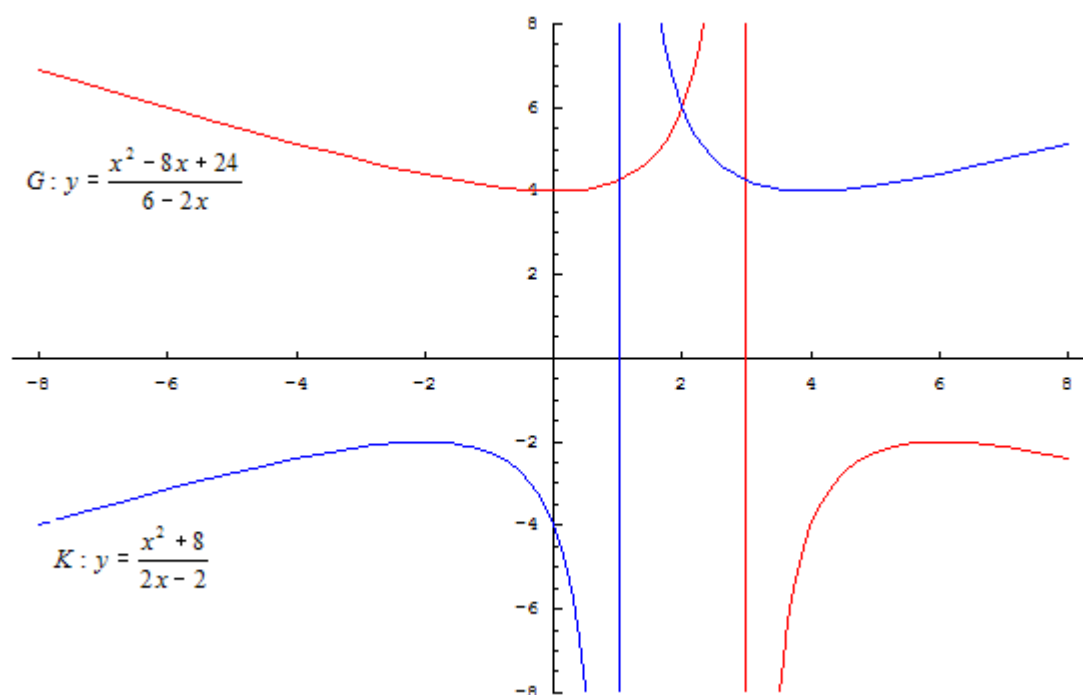
Punto 4

Si trovi l'equazione del luogo K simmetrico di G rispetto alla retta $x=2$

Il luogo K si trova a partire dal luogo G attraverso la trasformazione $\begin{cases} X = 4 - x \\ Y = y \end{cases}$ per cui

$$G: y = \frac{x^2 - 8x + 24}{6 - 2x} \rightarrow K: Y = \frac{(4 - X)^2 - 8(4 - X) + 24}{6 - 2(4 - X)} = \frac{X^2 + 8}{2X - 2}. \quad \text{Il luogo cercato è allora}$$

$$K: y = \frac{x^2 + 8}{2x - 2}.$$



QUESTIONARIO

Quesito 1

Quale è il dominio della funzione $f(x) = x^\pi - \pi^x$? Quale ne è il segno della derivata prima e quale quello della derivata seconda nel punto $x = \pi$?

La funzione in esame può essere così scritta: $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ in cui il dominio di $f_1(x) = x^\pi$ è R^+ , mentre il dominio di $f_2(x) = \pi^x$ è tutto R ; quindi anche la funzione differenza ha come dominio R^+ e cioè $(0, +\infty)$. Tuttavia, essendo l'esponente π positivo, la funzione è prolungabile per continuità in $x = 0$ in cui vale $f(0) = -1$.

Le derivate sono:

$$f'(x) = \pi \cdot x^{\pi-1} - \ln \pi \cdot \pi^x$$

$$f''(x) = \pi \cdot (\pi-1) \cdot x^{\pi-2} - \ln^2 \pi \cdot \pi^x$$

e valutate per $x = \pi$ forniscono

$$f'(\pi) = \pi \cdot \pi^{\pi-1} - \ln \pi \cdot \pi^\pi = \pi^\pi \cdot (1 - \ln \pi)$$

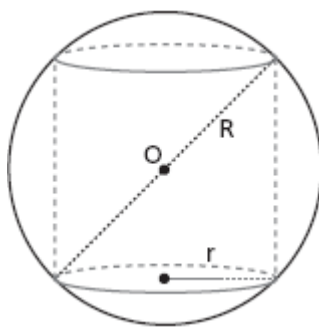
$$f''(\pi) = \pi \cdot (\pi-1) \pi^{\pi-2} - \ln^2 \pi \cdot \pi^\pi = \pi^\pi (1 - \ln^2 \pi) - \pi^{\pi-1}$$

Ora essendo $\pi > e \Rightarrow \ln \pi > \ln e = 1$ per cui entrambe le derivate in $x = \pi$ assumono valore negativo.

Quesito 2

Calcolate il rapporto tra la superficie totale di un cilindro equilatero e la superficie della sfera ad esso circoscritta.

Si consideri la figura sottostante che rappresenta un cilindro di raggio di base r inscritto in una sfera di raggio R .



La superficie totale del cilindro vale: $S_{Cilindro} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h \stackrel{h=2r}{=} 2\pi r^2 + 4\pi r^2 = 6\pi r^2$.

Il raggio della sfera è $R = \frac{2r\sqrt{2}}{2} = r\sqrt{2}$ e la superficie totale della sfera è

$$S_{Sfera} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot (r\sqrt{2})^2 = 8\pi r^2. \text{ Quindi } \frac{S_{Cilindro}}{S_{Sfera}} = \frac{6\pi r^2}{8\pi r^2} = \frac{3}{4}.$$

Quesito 3

Dimostrate che

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

La funzione $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ può essere scritta equivalentemente come $f(x) = e^{\ln\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$, per

cui $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\overbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}}^{=1}} = e$ in cui abbiamo sfruttato il limite notevole

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Un modo alternativo è ricondursi a un altro limite notevole, adoperando la

sostituzione $t = \frac{1}{x}$. In questo modo si ha $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$, avendo sfruttato il limite

notevole $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$.

Quesito 4

Dimostrate che la somma di qualsiasi numero reale positivo e del suo reciproco è almeno 2

Sia x un numero reale positivo e $y = \frac{1}{x}$ il suo reciproco. La loro somma è $S = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x}$.

Dimostriamo che $S = \frac{x^2 + 1}{x} \geq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$. La disequazione $\frac{x^2 + 1}{x} \geq 2$ è equivalente a $\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$ e

$\forall x \in \mathbb{R}^+$ essa è sempre soddisfatta. In particolare la somma è pari a 2 quando i due numeri sono uguali.

Quesito 5

I gradi sessagesimali, i radianti e i gradi centesimali sono le più comuni unità per la misura degli angoli. Date di ciascuna di esse una esauriente definizione.

- *Grado sessagesimale*: un novantesimo di angolo retto. Il grado è divisibile in sessanta parti che definiscono i primi, il primo è divisibile in sessanta parti ottenendo i secondi; l'ulteriore frazionamento prosegue con la divisione decimale (es. $\alpha = 47^\circ 32' 43,13''$).
- *Grado centesimale*: un centesimo di angolo retto. Il grado è divisibile in cento parti che definiscono i primi centesimali, il primo centesimale è divisibile in cento parti ottenendo i secondi centesimali; l'ulteriore frazionamento prosegue con sottomultipli decimali (es. $\alpha = 47^g 32^c 43,13^{cc}$).

- *Radiante*: un $\frac{1}{\pi}$ di angolo piatto.

Quesito 6

Sia APB un angolo la cui misura in radianti è data dal numero e di Nepero, base dei logaritmi naturali. Quale è la misura in gradi sessagesimali di APB e quale quella in gradi centesimali? Motivate la vostra risposta.

Nel Quesito 5 sono state definite le tre più comuni unità per la misura degli angoli, i gradi sessagesimali, i radianti e i gradi centesimali.

La proporzione tra radianti e gradi sessagesimali è:

$$\frac{\alpha^r}{\alpha^\circ} = \frac{\pi^r}{180^\circ} \Rightarrow \alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi^r} \cdot \alpha^r$$

La proporzione tra centesimali (indicati con *grad*) e gradi sessagesimali è:

$$\frac{\alpha^g}{\alpha^\circ} = \frac{400^g}{360^\circ} \Rightarrow \alpha^g = \frac{10^g}{9^\circ} \alpha^\circ$$

La proporzione tra radianti e gradi centesimali è:

$$\frac{\alpha^r}{\alpha^g} = \frac{\pi^r}{200^g} \Rightarrow \alpha^g = \frac{200^g}{\pi^r} \cdot \alpha^r$$

Nel caso in esame

$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi^r} \cdot \alpha^r = \frac{180^\circ}{\pi^r} \cdot e^r = \left(180 \cdot \frac{e}{\pi} \right)^\circ = \overbrace{155^\circ.7461}^{\text{Sistema sessadecimale}} = \overbrace{155^\circ 44' 45''.87}^{\text{Sistema sessagesimale}}$$

$$\alpha^g = \frac{10^g}{9^\circ} \alpha^\circ = \frac{10^g}{9^\circ} \cdot (155^\circ.7461) = 173^g.051222 = 173^g 5^c 12^{cc}.22$$

Quesito 7

Calcolate la derivata della funzione

$$f(x) = \arctan x - \arctan \frac{x-1}{x+1}$$

Quali conclusioni ne potete trarre per la $f(x)$? La funzione è una costante? Se sì, quale è la costante?

La funzione $f(x) = \arctan x - \arctan \frac{x-1}{x+1}$ è definita per $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. La derivata prima è:

$$y' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{2(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Essendo la derivata prima nulla, la funzione è costante negli intervalli di esistenza $(-\infty, -1)$ e $(-1, +\infty)$, e il valore della costante può essere trovato valutando la funzione in un punto qualsiasi dei due intervalli $(-\infty, -1)$ e $(-1, +\infty)$. In particolare, valutando la funzione in $x = 0 \in (-1, +\infty)$ e in $x = -\sqrt{3} \in (-\infty, -1)$, si ha:

$$x \in (-1, +\infty) \Rightarrow y = y(0) = \arctan(0) - \arctan(-1) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} x \in (-\infty, -1) \Rightarrow y = y(-\sqrt{3}) &= \arctan(-\sqrt{3}) - \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}-1}{-\sqrt{3}+1}\right) = \\ &= -\arctan(\sqrt{3}) - \arctan(2 + \sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{12} = -\frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

In conclusione la funzione è costante a tratti e vale

$$f(x) = \arctan x - \arctan \frac{x-1}{x+1} = \begin{cases} -\frac{3\pi}{4} & \text{se } x \in (-\infty, -1) \\ \frac{\pi}{4} & \text{se } x \in (-1, +\infty) \end{cases}.$$

Quesito 8

Verificate che la funzione: $y = e^{-x} + x^{-1}$ **è invertibile e detta g la funzione inversa, calcolate** $g'(1 + e^{-1})$.

La funzione $y = e^{-x} + x^{-1}$ è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed ha derivata prima $y' = -e^{-x} - x^{-2}$. Dall'analisi della derivata prima si deduce che la funzione è strettamente decrescente in tutto il dominio, per cui invertibile in esso. Detta g la funzione inversa, la derivata della funzione inversa è pari a

$$g'(y_0) = \left[\frac{1}{f'(x_0)} \right] \quad \text{con} \quad y_0 = f(x_0). \quad \text{Nel caso in esame} \quad x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1 + e^{-1}, \quad \text{per cui}$$

$$g'(1 + e^{-1}) = \left[\frac{1}{f'(1)} \right] = \left[\frac{1}{-e^{-x} - x^{-2}} \right]_{x=1} = \frac{1}{-e^{-1} - 1} = -\frac{e}{e+1}.$$