

ESAME DI STATO: Indirizzo Scientifico
Sessione ordinaria 2003
SECONDA PROVA SCRITTA
Tema di MATEMATICA
(AMERICA – emisfero boreale)

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario:

PROBLEMA 1.

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{kx^3 + 9x}{x^2 + k},$$

dove k è un parametro reale non nullo.

- a. Determinare a quali valori di k corrispondono curve continue su tutto l'asse reale.
- b. Dimostrare che le curve assegnate hanno tre punti in comune.
- c. Dimostrare che i tre punti sono allineati.
- d. Tra le curve assegnate determinare la curva γ avente per asintoto la retta di equazione $y=x$ e disegnarne l'andamento.
- e. Verificare che i tre punti comuni a tutte le curve assegnate sono flessi per la curva γ .

PROBLEMA 2.

Dopo aver riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy):

- a. tra le iperboli di equazione $xy=k$ indicare con j quella che passa per il punto $A(1,3)$ e chiamare B il suo punto di ascissa -3 ;
- b. determinare i coefficienti dell'equazione $y=ax^2+bx+c$ in modo che la parabola p rappresentata da essa sia tangente a j in A e passi per B ;
- c. determinare le coordinate del punto situato sull'arco AB della parabola p e avente la massima distanza dalla retta AB ;
- d. indicata con R la regione finita di piano delimitata dall'iperbole j , dalla parabola p , dall'asse x e dalla retta di equazione $x=3$, calcolare il volume del solido generato dalla regione R quando ruota di un giro completo intorno all'asse x .

QUESTIONARIO.

1. Le ampiezze degli angoli di un triangolo sono α, β, γ . Sapendo che $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ e $\cos \beta = \frac{5}{12}$, calcolare il valore esatto di $\cos \gamma$, specificando se il triangolo è rettangolo, acutangolo o ottusangolo.

2. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva di equazione $y = \cos x - 2 \sin x$. Determinare una traslazione degli assi che trasformi l'equazione nella forma $Y = k \sin X$.

3. Un trapezio è circoscrittibile ad un cerchio. Dimostrare che il triangolo avente per vertici il centro del cerchio e gli estremi di uno dei lati obliqui è un triangolo rettangolo.

4. x ed y sono due numeri naturali qualsiasi tali che $x - y = 1$. Stabilire se il numero $x^4 - y^4$ è divisibile per 2 o se non lo è.

5. Determinare il campo di esistenza della funzione:

$$\ln \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

6. La funzione reale di variabile reale $f(x)$ è derivabile in ogni x per cui risulti $1.0 \leq x \leq 1.1$; inoltre $f(1.1)=0$ e $1.0 \leq f'(x) \leq 1.1$ in ogni x dell'intervallo $1.0 < x \leq 1.1$. Dimostrare che risulta: $-0.11 \leq f(1.0) \leq -0.10$.

7. Sia $f(x)$ una funzione continua e non negativa nell'intervallo chiuso e limitato $a \leq x \leq b$, rappresentata graficamente in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy). Indicata con R la regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione, dall'asse x e dalle rette $x=a$ e $x=b$, dimostrare che il volume V del solido generato dalla regione R quando ruota di un giro completo intorno all'asse x è dato dalla formula seguente:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

· Durata della prova: 6 ore.

· Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

· È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{kx^3 + 9x}{x^2 + k},$$

dove k è un parametro reale non nullo.

Punto a

Determinare a quali valori di k corrispondono curve continue su tutto l'asse reale.

La funzione $y = \frac{kx^3 + 9x}{x^2 + k}$ ha come dominio $x \in \mathbb{R} : (x^2 + k) \neq 0$, per cui essa è definita su tutto l'asse reale se e solo se $k > 0$. Infatti se fosse $k \leq 0$ il dominio sarebbe $(-\infty, -\sqrt{-k}) \cup (-\sqrt{-k}, \sqrt{-k}) \cup (\sqrt{-k}, +\infty)$ cioè $\mathbb{R} - \{\pm \sqrt{-k}\}$.

Punto b

Dimostrare che le curve assegnate hanno tre punti in comune.

La funzione in esame, supponendo $(x^2 + k) \neq 0$, può così essere riscritta: $(x^2 + k)y - kx^3 - 9x = 0$ da cui $k(y - x^3) + x^2y - 9x = 0$ da cui si ricavano le due

condizioni $\begin{cases} y - x^3 = 0 \\ x^2y - 9x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x^5 - 9x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x(x^4 - 9) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x = 0, x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$ per cui i

punti in comune tra le differenti curve al variare del parametro k sono:

$$A = (0,0), B = (\sqrt{3}, 3\sqrt{3}), C = (-\sqrt{3}, -3\sqrt{3}).$$

Punto c

Dimostrare che i tre punti sono allineati.

I tre punti in comune sono allineati lungo la retta $y = 3x$.

Punto d

Tra le curve assegnate determinare la curva γ avente per asintoto la retta di equazione $y=x$ e disegnarne l'andamento.

L'asintoto obliquo della funzione $y = \frac{kx^3 + 9x}{x^2 + k}$ ha equazione $y = mx + q$ con

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{kx^3 + 9x}{x^2 + k}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{kx^3 + 9x}{x^3 + kx} = k,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{kx^3 + 9x}{x^2 + k} - kx \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x(9 - k^2)}{x^2 + k} \right] = 0$$

Quindi l'asintoto sarà la retta $y = x$ se e solo se $k = 1$ in corrispondenza del quale si ha

la curva $y = \frac{x^3 + 9x}{x^2 + 1}$.

Studiamo la funzione $\gamma: y = \frac{x^3 + 9x}{x^2 + 1}$.

✚ *Dominio:* l'intero asse reale;

✚ *Intersezione asse ascisse:* $y = \frac{x^3 + 9x}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \rightarrow y = 0$;

✚ *Intersezione asse ordinate:* $x = 0 \rightarrow y = 0$;

✚ *Eventuali simmetrie:* la funzione è dispari, infatti $y(-x) = \frac{-x^3 - 9x}{x^2 + 1} = -y(x)$;

✚ *Positività:* $y = \frac{x^3 + 9x}{x^2 + 1} > 0 \Rightarrow x \in (0, +\infty)$;

✚ *Asintoti verticali:* non ce ne sono visto il dominio;

✚ *Asintoti orizzontali:* non ce ne sono visto che c'è quello obliquo, e ciò esclude per una funzione razionale fratta la presenza dell'asintoto orizzontale; infatti

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3 + 9x}{x^2 + 1} \right] = \pm\infty;$$

✚ *Asintoti obliqui:* la retta $y = x$ è asintoto obliquo doppio come già evidenziato;

✚ *Crescenza e decrescenza:* la derivata prima è

$$y' = \frac{(3x^2 + 9)(x^2 + 1) - (x^3 + 9x)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 - 6x^2 + 9}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 - 3)^2}{(x^2 + 1)^2}$$

per cui la funzione è crescente su tutto \mathbb{R} ;

 **Flessi:** La derivata seconda è :

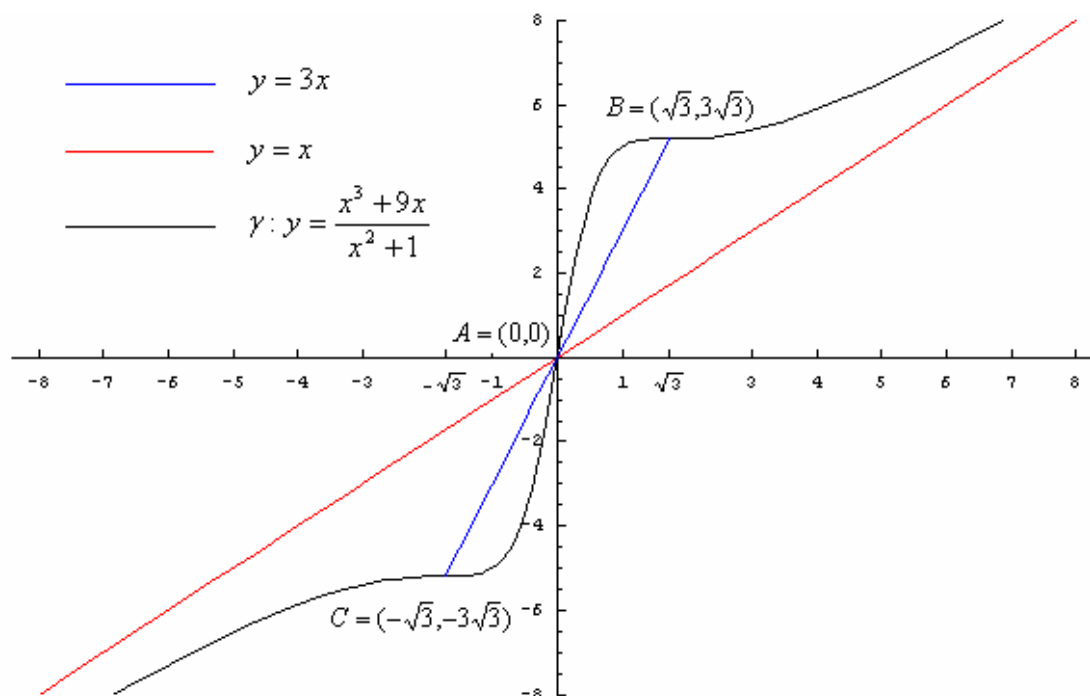
$$y'' = \frac{4x(x^2 - 3)(x^2 + 1)^2 - 4x(x^2 + 1)(x^2 - 3)^2}{(x^2 + 1)^4} = \frac{16x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{3}.$$

Si evince subito allora che il punto $A=(0,0)$ è un flesso a tangente obliqua, mentre per gli altri due punti di ascisse $x = \pm\sqrt{3}$ si deve calcolare la derivata terza visto che in esse si annulla anche la derivata prima. Calcolando allora la derivata terza

si ha $y''' = -\frac{48(x^4 - 6x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4}$ e quindi $y'''(\pm\sqrt{3}) = 6 \neq 0$, per cui i due punti

$B = (\sqrt{3}, 3\sqrt{3}), C = (-\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$ sono flessi a tangente orizzontale. In conclusione ci sono tre flessi, di cui $A=(0,0)$ a tangente obliqua e $B = (\sqrt{3}, 3\sqrt{3}), C = (-\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$ a tangente orizzontale.

Il grafico è sotto presentato:



Punto e

Verificare che i tre punti comuni a tutte le curve assegnate sono flessi per la curva γ .

Come dimostrato nel punto precedente i tre punti $A = (0,0)$, $B = (\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$, $C = (-\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$ sono flessi per γ , $A = (0,0)$ con tangente obliqua e $B = (\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$, $C = (-\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$ con tangente orizzontale.

PROBLEMA 2

Dopo aver riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy):

Punto a

Tra le iperboli di equazione $xy=k$ indicare con j quella che passa per il punto $A(1,3)$ e chiamare B il suo punto di ascissa -3 ;

L'iperbole richiesta ha equazione $j: xy = 3$ e $B = (-3, -1)$.

Punto b

Determinare i coefficienti dell'equazione $y=ax^2+bx+c$ in modo che la parabola p rappresentata da essa sia tangente a j in A e passi per B ;

Il passaggio per $B = (-3, -1)$ impone $9a - 3b + c = -1$; il passaggio per $A = (1, 3)$ impone $a + b + c = 3$; inoltre la tangenza in $A = (1, 3)$ a $j: xy = 3$ comporta che il coefficiente angolare della tangente a $j: xy = 3$ in $A = (1, 3)$ è quello della tangente alla parabola

nello stesso punto. In particolare $m_j = \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{3}{x} \right) \right]_{x=1} = \left[-\frac{3}{x^2} \right]_{x=1} = -3$ mentre

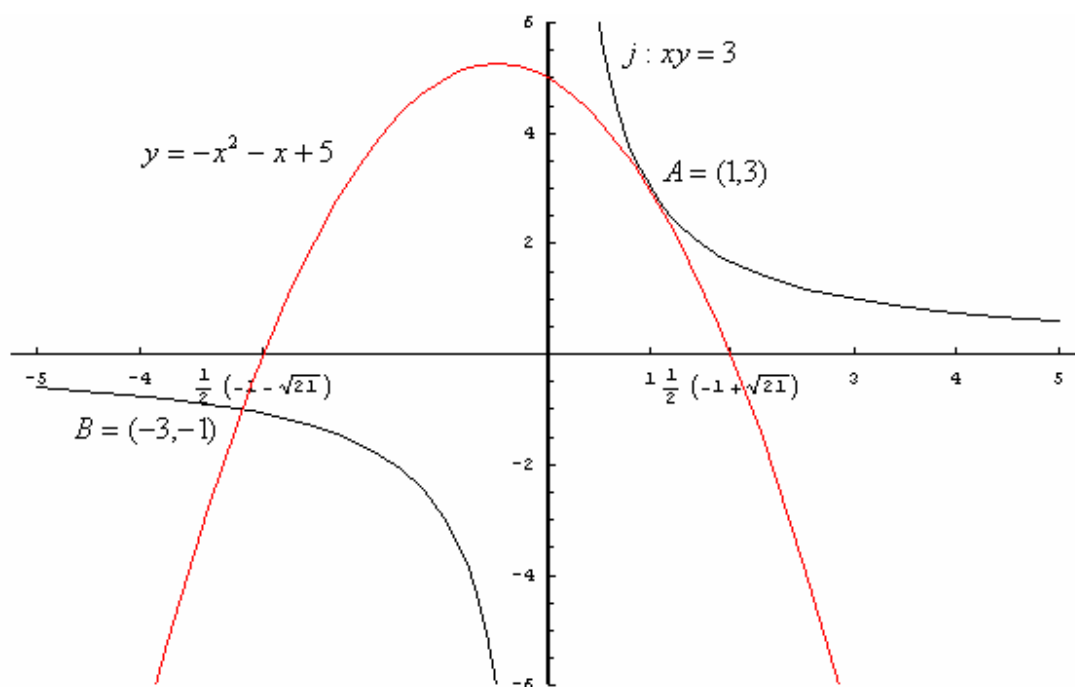
$m_p = \left[\frac{d}{dx} (ax^2 + bx + c) \right]_{x=1} = [2ax + b]_{x=1} = 2a + b$. Quindi la terza condizione è

$2a + b = -3$. Le tre equazioni nelle tre incognite sono $\begin{cases} 9a - 3b + c = -1 \\ a + b + c = 3 \\ 2a + b = -3 \end{cases}$ e sfruttando

$$\text{Cramer si ha: } a = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = -1, b = \frac{\begin{vmatrix} 9 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{-16} = -1, c = \frac{\begin{vmatrix} 9 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{-16} = 5, \text{ per cui}$$

la parabola ha equazione $y = -x^2 - x + 5$.

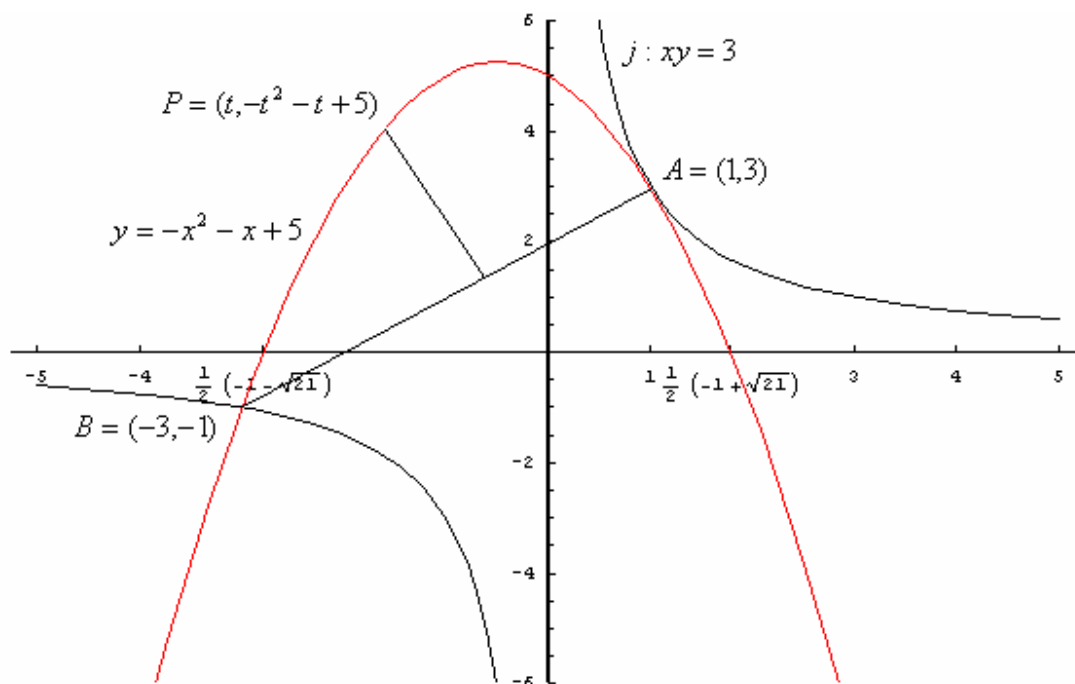
L'iperbole e la parabola sono sotto presentate:



Punto c

Determinare le coordinate del punto situato sull'arco AB della parabola p e avente la massima distanza dalla retta AB;

Il punto P in questione ha coordinate $P = (t, -t^2 - t + 5)$ con $-3 \leq t \leq 1$ come sotto raffigurato:



La retta AB ha equazione $y - x - 2 = 0$ per cui la distanza di $P = (t, -t^2 - t + 5)$ da essa

sarà: $d(t) = \frac{|-t^2 - t + 5 - t - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|-t^2 - 2t + 3|}{\sqrt{2}}$ e poiché $-3 \leq t \leq 1$, allora è possibile

togliere il valore assoluto, per cui $d(t) = \frac{-t^2 - 2t + 3}{\sqrt{2}}$, cioè la distanza è una parabola con

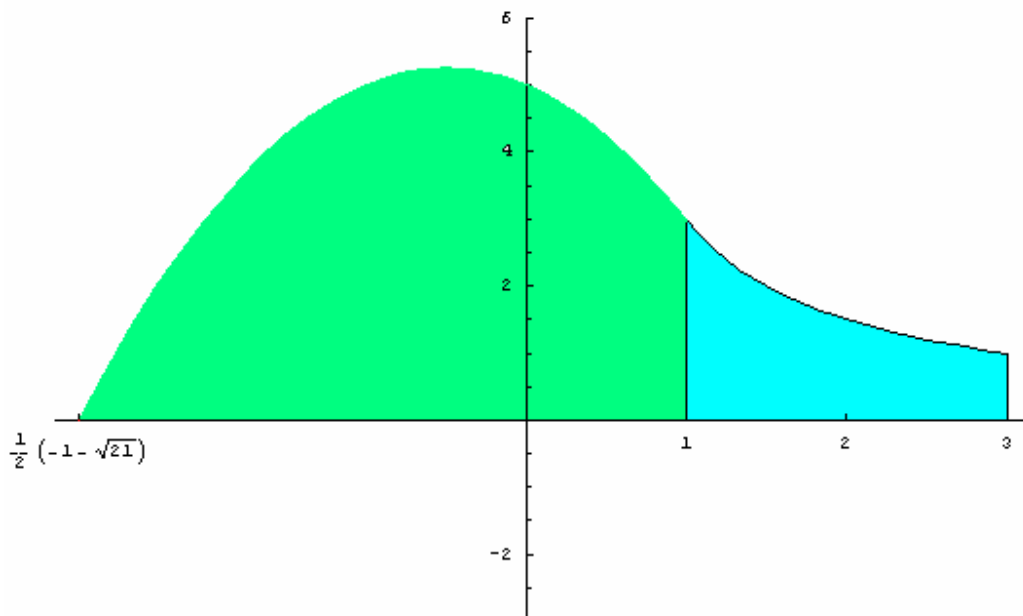
concavità verso il basso e col massimo in corrispondenza del vertice. Cioè la distanza

massima la si ha in corrispondenza di $P \equiv V = (-1, 5)$ e vale $d_{\max} = 2\sqrt{2}$.

Punto d

Indicata con R la regione finita di piano delimitata dall'iperbole j, dalla parabola p, dall'asse x e dalla retta di equazione $x=3$, calcolare il volume del solido generato dalla regione R quando ruota di un giro completo intorno all'asse x.

La regione R è sotto raffigurata:



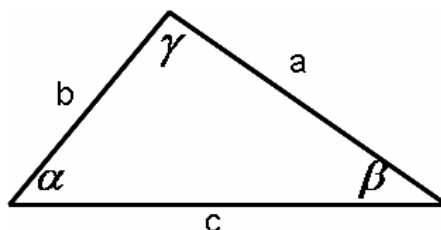
Il volume per il teorema di Guldino è:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\frac{(1+\sqrt{21})}{2}}^1 [-x^2 - x + 5]^2 dx + \pi \int_1^3 \left[\frac{3}{x} \right]^2 dx = \\ &= \pi \int_{\frac{(1+\sqrt{21})}{2}}^1 (x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 10x + 25) dx + \pi \int_1^3 \left(\frac{9}{x^2} \right) dx = \\ &= \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - 3x^3 - 5x^2 + 25x \right]_{\frac{(1+\sqrt{21})}{2}}^1 + \pi \left[-\frac{9}{x} \right]_1^3 = \\ &= \frac{3\pi}{20} (247 + 49\sqrt{21}) \end{aligned}$$

QUESTIONARIO**Quesito 1**

Le ampiezze degli angoli di un triangolo sono α, β, γ . Sapendo che $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ e $\cos \beta = \frac{12}{13}$, calcolare il valore esatto di $\cos \gamma$, specificando se il triangolo è rettangolo, acutangolo o ottusangolo.

Si consideri la seguente figura:



Gli angoli α, β, γ , in quanto angoli di un triangolo devono soddisfare la condizione di appartenere all'intervallo $[0^\circ, 180^\circ]$ ed anche la condizione per cui la loro somma è 180° . La prima condizione equivale ad affermare che i seni degli angoli devono essere assolutamente non negativi, per cui $\cos \alpha = \frac{5}{13} \rightarrow \sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \beta = \frac{12}{13} \rightarrow \sin \beta = \frac{5}{13}$.

Inoltre per la seconda condizione, $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \Rightarrow \cos \gamma = \cos[180^\circ - (\alpha + \beta)] = -\cos(\alpha + \beta)$, quindi

$\cos \gamma = \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta = \frac{60}{169} - \frac{60}{169} = 0 \Rightarrow \gamma = 90^\circ$ e cioè il triangolo è rettangolo. In tal caso le terne pitagoriche rappresentanti i lati del triangolo sono $(a = 12k, b = 5k, c = 13k), k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Quesito 2

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva di equazione $y = \cos x - 2 \sin x$. Determinare una traslazione degli assi che trasformi l'equazione nella forma $Y = k \sin X$.

Innanzitutto proviamo a scrivere la funzione $y = \cos x - 2 \sin x$ nella forma $y = A \sin(x + \alpha)$. Ricordando che $y = A \sin(x + \alpha) = A \sin x \cos \alpha + A \cos x \sin \alpha$, la

condizione $y = \cos x - 2 \sin x = A \sin(x + \alpha)$ è verificata se e solo se $\begin{cases} A \cos \alpha = -2 \\ A \sin \alpha = 1 \end{cases}$. Se

eleviamo al quadrato ambo i membri delle due relazioni e li sommiamo otteniamo l'equazione $A^2 = 5 \Rightarrow A = \pm\sqrt{5}$, mentre se dividiamo la seconda per la prima otteniamo

$\tan \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = m\pi - \arctan\left(\frac{1}{2}\right), m \in \mathbb{Z}$. Abbiamo quindi calcolato i due parametri

che mancavano $\begin{cases} A = \pm\sqrt{5} \\ \alpha = m\pi - \arctan\left(\frac{1}{2}\right), m \in \mathbb{Z} \end{cases}$. Delle quattro possibili coppie di valori,

quelle che soddisfano le due condizioni di partenza $\begin{cases} A \cos \alpha = -2 \\ A \sin \alpha = 1 \end{cases}$ sono

$$\left(A = \sqrt{5}, \alpha = (2m+1)\pi - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \right), \left(A = -\sqrt{5}, \alpha = 2m\pi - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \right),$$

cioè (A positivo, m dispari), (A negativo, m pari). Per entrambe le coppie, la funzione

sinusoidale corrispondente $y = A \sin(x + \alpha)$ vale

$$y = -\sqrt{5} \sin\left(x - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \sqrt{5} \sin\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - x\right). \quad \text{Quindi la funzione}$$

$y = \cos x - 2 \sin x$ la possiamo scrivere nella forma

$$y = -\sqrt{5} \sin\left(x - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \sqrt{5} \sin\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - x\right).$$

Se, in conclusione, si effettua la trasformazione $\begin{cases} k = -\sqrt{5} \\ X = x - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \\ Y = y \end{cases}$, composizione di un

cambiamento di scala negativo e di una traslazione lungo l'asse delle ascisse positive,

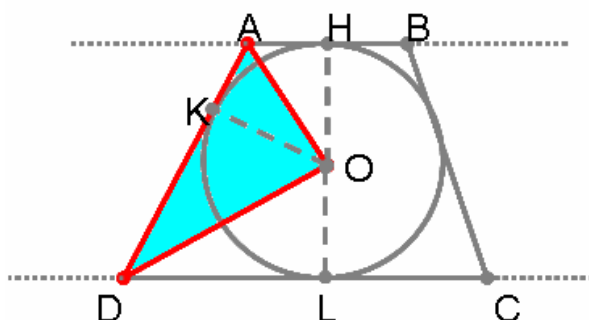
oppure la trasformazione $\begin{cases} k = \sqrt{5} \\ X = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - x \\ Y = y \end{cases}$, combinazione di un cambiamento di scala

positivo, di un ribaltamento lungo le ascisse e di una susseguente traslazione lungo le ascisse negative, sarà possibile scrivere $y = \cos x - 2 \sin x$ nella forma $Y = k \sin X$.

Quesito 3

Un trapezio è circoscrittibile ad un cerchio. Dimostrare che il triangolo avente per vertici il centro del cerchio e gli estremi di uno dei lati obliqui è un triangolo rettangolo.

Consideriamo la figura sottostante:



Dobbiamo dimostrare che il triangolo AOD è rettangolo in O.

I triangoli AOH e AOK sono congruenti aventi il AO lato in comune, $OK=OH$ in quanto raggi del cerchio inscritto e $AK=AH$ per il teorema sulle tangenti ad un cerchio. Quindi $\hat{KAO} = \hat{HAO} = \alpha$. Stesso discorso vale per i triangoli KOD e LOD per cui $\hat{KDO} = \hat{HDO} = \beta$. Ma, le rette AB e DC attraversate dalla trasversale AD, formano angoli alterni interni uguali ed in particolare $\hat{ADL} = 180^\circ - \hat{DAB} \Leftrightarrow 2\beta = 180^\circ - 2\alpha \Leftrightarrow \beta = 90^\circ - \alpha \Leftrightarrow \hat{AOD} = 90^\circ$, come volevasi dimostrare.

Quesito 4

x ed y sono due numeri naturali qualsiasi tali che $x - y = 1$. Stabilire se il numero $x^4 - y^4$ è divisibile per 2 o se non lo è.

Il numero $x^4 - y^4$ può così essere riscritto:

$$x^4 - y^4 = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) \xrightarrow{x-y=1} \\ x^4 - y^4 = (2y + 1)(2y^2 + 2y + 1) = (2y + 1)[2y(y + 1) + 1]$$

Ora $(2y + 1)$ è dispari in quanto somma di un numero pari $(2y)$ con un dispari (1) , ed anche $[2y(y + 1) + 1]$ è dispari, in quanto somma di un numero pari $2y(y + 1)$ (prodotto di

$(y+1)$ per un pari $(2y)$ e di un dispari (1) . In conclusione $x^4 - y^4$ è il prodotto di due numeri dispari, per cui è anch'esso un numero dispari e quindi non è divisibile per 2.

Quesito 5

Determinare il campo di esistenza della funzione: $\ln \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

Il dominio della funzione richiesta è dato dalla risoluzione della disequazione razionale

fratta $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 0$ la cui soluzione è data dall'unione delle soluzioni dei

seguenti sistemi:

$$\begin{cases} (x-1)(x-2)(x-3) > 0 \\ (x+1)(x+2)(x+3) > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} (x-1)(x-2)(x-3) < 0 \\ (x+1)(x+2)(x+3) < 0 \end{cases}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} 1 < x < 2 \vee x > 3 \\ x > -1 \vee -3 < x < -2, \end{cases} \cup \begin{cases} x < 1 \vee 2 < x < 3 \\ x < -3 \vee -2 < x < -1 \end{cases}$$

\Leftrightarrow

$$1 < x < 2 \vee x > 3 \cup x < -3 \vee -2 < x < -1$$

\Leftrightarrow

$$x \in (-\infty, -3) \cup (-2, -1) \cup (1, 2) \cup (3, +\infty)$$

Ad analoga conclusione saremmo giunti, se avessimo risolto la disequazione col metodo del falso sistema.

Quesito 6

La funzione reale di variabile reale $f(x)$ è derivabile in ogni x per cui risulti $1.0 \leq x \leq 1.1$; inoltre $f(1.1)=0$ e $1.0 \leq f'(x) \leq 1.1$ in ogni x dell'intervallo $1.0 < x \leq 1.1$.

Dimostrare che risulta: $-0.11 \leq f(1.0) \leq -0.10$.

Si può applicare il teorema di Lagrange, per cui

$$\exists c \in [1.0, 1.1]: f'(c) = \frac{f(1.1) - f(1.0)}{0.1} = -10f(1.0) \quad . \quad \text{Poiché in ogni } x \text{ dell'intervallo}$$

$$1.0 < x \leq 1.1 \quad \text{vale} \quad 1.0 \leq f'(x) \leq 1.1, \quad \text{si} \quad \text{ha}$$

$$1.0 \leq -10f(1.0) \leq 1.1 \Leftrightarrow -0.11 \leq f(1.0) \leq -0.10.$$

Quesito 7

Sia $f(x)$ una funzione continua e non negativa nell'intervallo chiuso e limitato $a \leq x \leq b$, rappresentata graficamente in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy). Indicata con R la regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione, dall'asse x e dalle rette $x=a$ e $x=b$, dimostrare che il volume V del solido generato dalla regione R quando ruota di un giro completo

intorno all'asse x è dato dalla formula seguente: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

Chiamiamo V il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando intorno all'asse delle ascisse x il rettangoloide di base $[a, b]$ definito dalla funzione continua e non negativa $f: [a, b] \rightarrow R$. Ora per ogni $\xi \in [a, b]$, la sezione di V con il piano $x = \xi$ non è altro che il cerchio di raggio $f(\xi)$ ed area $A(\xi) = \pi \cdot f^2(\xi)$. Al variare di $\xi \in [a, b]$, il volume del solido di rotazione non è altro allora che la somma di tutti i volumetti dei cilindroidi di area di base $A(\xi) = \pi \cdot f^2(\xi)$ ed altezza infinitesima $d\xi$, cioè non è altro che

$$V = \int_a^b A(x) dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

La dimostrazione effettuata è analoga a quella che si effettua per dimostrare che l'area sottesa da una curva $f(x)$ con $x \in [a, b]$ è la somma delle aree dei rettangoli di base infinitesima dx ed altezza $f(x)$ e che vale $\int_a^b f(x) dx$.

Come esempio di applicazione, calcoliamo il volume di una sfera. Una sfera di raggio r può essere pensata come la rotazione intorno all'asse delle ascisse x del rettangoloide di base $[-r, r]$ della funzione $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, per cui il volume della sfera sarà

$$V = \pi \int_{-r}^r [\sqrt{r^2 - x^2}]^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

In letteratura questo teorema va sotto il nome di teorema di Guldino, in quanto è una generalizzazione del 2° teorema di Guldino.