

**MINISTERO DELL'ISTRUZIONE, DELL'UNIVERSITÀ, DELLA RICERCA**

**SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO (Americhe)**

**ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**

*Sessione Ordinaria 2004*

**SECONDA PROVA SCRITTA**

**Tema di Matematica**

*Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario.*

**PROBLEMA 1**

Tra i coni circolari retti inscritti in una sfera di raggio 10 *cm*, si determini:

1. il cono C di volume massimo e il valore, espresso in *litri*, di tale volume massimo.
2. il valore approssimato, in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale di C;
3. il raggio della sfera inscritta nel cono C e la percentuale del volume del cono che essa occupa.

**PROBLEMA 2**

Sia  $f$  la funzione definita da:

$$f(x) = \frac{x+a}{bx^2+cx+2} \quad (1)$$

1) Si determinino i valori dei parametri che figurano nell'equazione (1) disponendo delle seguenti informazioni:

- a) i valori di  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sono 0 o 1;
- b) il grafico G di  $f$  passa per  $(-1, 0)$ ;
- c) la retta  $y=1$  è un asintoto di  $f$ .

2) Si disegni G.

3) Si calcoli l'area della regione finita di piano del primo quadrante degli assi cartesiani compresa tra l'asintoto orizzontale, il grafico G e le rette  $x=0$ ,  $x=2$

## QUESTIONARIO

1. La coppia  $(1, 2)$  è la soluzione di un sistema lineare di due equazioni in due incognite. Quale può essere il sistema?

2. Sia  $\alpha$  tale che la funzione  $f(x) = \alpha x - \frac{x^3}{1+x^2}$  risulti crescente. Provare che  $\alpha \geq \frac{9}{8}$

3. Mostrare che le tangenti alla curva  $y = \frac{\pi \sin(x)}{x}$  in  $x = \pi$  e  $x = -\pi$  si intersecano ad angolo retto.

4. Nei saldi di fine stagione, un negozio ha diminuito del 30% il prezzo di listino di tutti gli articoli. Se il prezzo scontato di un abito è di 275 euro quale era il suo prezzo di listino?

5. Calcolare:

$$\int_0^{\pi} e^x \cos(x) dx$$

6. Si dica quante sono le soluzioni reali dell'equazione  $\frac{x}{10} = \sin(x)$  e si indichi per ciascuna di esse un intervallo numerico che la comprende.

7. Se  $\operatorname{tg} \alpha$  e  $\operatorname{tg} \beta$  sono radici di  $x^2 - px + q = 0$  e  $\operatorname{ctg} \alpha$  e  $\operatorname{ctg} \beta$  sono radici di  $x^2 - rx + s = 0$ , quanto vale il prodotto  $rs$  espresso in funzione di  $p$  e  $q$ ?

8. Un professore interroga i suoi alunni a due per volta. Stabilire quante possibili coppie diverse può interrogare, sapendo che la classe è di 20 studenti.

---

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.

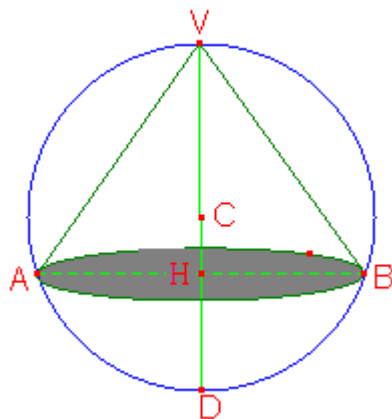
# **PROBLEMA 1**

**Tra i coni circolari retti inscritti in una sfera di raggio 10 cm, si determini:**

*Punto 1*

**Il cono C di volume massimo e il valore, espresso in litri, di tale volume massimo.**

Consideriamo la figura sottostante rappresentante la sezione di un cono inscritto in una sfera:



Poniamo  $\overline{VH} = x$ , con  $0 < x < 20$ . Con queste assunzioni  $\overline{HD} = 20 - x$  e poiché il triangolo VDB è rettangolo in quanto inscritto in una semicirconferenza, per il teorema di Euclide  $\overline{HB}^2 = \overline{VH} \cdot \overline{HD} = x \cdot (20 - x)$ . Il volume del cono è  $V(x) = \frac{1}{3}(\pi \cdot \overline{HB}^2) \cdot \overline{VH} = \frac{\pi}{3} \cdot [x^2 \cdot (20 - x)]$  con  $0 < x < 20$ . La massimizzazione del volume la effettuiamo attraverso le derivate:

$$V'(x) = \frac{\pi}{3} \cdot [40x - 3x^2]$$

$$V''(x) = \frac{\pi}{3} \cdot [40 - 6x]$$

Si ha:

$$V'(x) = \frac{\pi}{3} \cdot [40x - 3x^2] > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{40}{3} \Rightarrow V(x) \text{ strettamente crescente in } \left(0, \frac{40}{3}\right)$$

$$V'(x) = \frac{\pi}{3} \cdot [40x - 3x^2] < 0 \Rightarrow \frac{40}{3} < x < 20 \Rightarrow V(x) \text{ strettamente decrescente in } \left(\frac{40}{3}, 20\right)$$

Inoltre  $V''(x) = \frac{\pi}{3} \cdot [40 - 6x]_{x=\frac{40}{3}} = -\frac{40\pi}{3} < 0$ , per cui il volume è massimo per  $x = \frac{40}{3}$  e vale

$$V\left(\frac{40}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \left[\left(\frac{40}{3}\right)^2 \cdot \left(20 - \frac{40}{3}\right)\right] = \frac{32000\pi}{81} [\text{cm}^3]. \text{ Ma } 1[\text{cm}^3] = 10^{-3}[\text{dm}^3] = 10^{-3}[\text{litri}] \text{ per cui il}$$

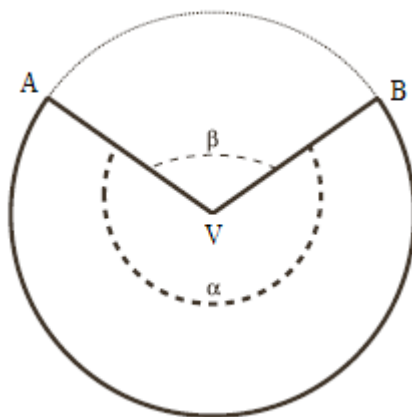
$$\text{volume massimo in litri è } V\left(\frac{40}{3}\right) = \frac{32\pi}{81} [\text{litri}] \approx 1.241 [\text{litri}]$$

**Punto 2**

**Il valore approssimato, in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale di C;**

Lo sviluppo piano della superficie laterale del cono determina il settore circolare di raggio pari

all'apotema del cono  $\overline{VB} = \sqrt{\overline{HB}^2 + \overline{VH}^2} = \sqrt{\frac{800}{9} + \frac{1600}{9}} = \frac{20\sqrt{6}}{3}$  rappresentato in figura.



La lunghezza dell'arco  $AB$  è pari alla misura della circonferenza della base del cono

$$2\pi \cdot \overline{HB} = \frac{40\sqrt{2}}{3} \pi, \text{ pertanto la misura in radianti dell'angolo } \alpha \text{ è } \alpha = \frac{\frac{40\sqrt{2}}{3} \pi}{\frac{20\sqrt{6}}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cong 3.627 \text{ rad e}$$

in gradi sessagesimali è  $\alpha^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 180^\circ \cong (207.84)^\circ = 207^\circ 50' 24''$ .

**Punto 3**

**Il raggio della sfera inscritta nel cono C e la percentuale del volume del cono che essa occupa.**

Riferendosi sempre alla figura del triangolo inscritto nella circonferenza, il raggio della

circonferenza inscritta nel triangolo VAB è dato da  $r = \frac{2S_{VAB}}{2p_{VAB}}$  cioè dal rapporto tra il doppio

dell'area di VAB ed il suo perimetro. Il perimetro di VAB è

$$2p_{VAB} = 2\overline{VB} + \overline{AB} = \frac{40\sqrt{6}}{3} + \frac{40\sqrt{2}}{3} = \frac{40}{3}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \text{ mentre l'area è } S_{VAB} = \frac{\overline{VH} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{800\sqrt{2}}{9} \text{ per}$$

$$\text{cui } r = \frac{2S_{VAB}}{2p_{VAB}} = \frac{\frac{1600\sqrt{2}}{9}}{\frac{40}{3}(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \frac{40}{3(\sqrt{3} + 1)} = \frac{20(\sqrt{3} - 1)}{3}. \text{ Il volume del cono è } V_{Cono} = \frac{32\pi}{81} [\text{litri}]$$

mentre quello della sfera è  $V_{Sfera} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{32(\sqrt{3}-1)^3 \pi}{81}$  [litri] per cui la percentuale del volume del

cono che essa occupa è  $p_{\%} = \frac{V_{Sfera}}{V_{Cono}} = \frac{\frac{32(\sqrt{3}-1)^3 \pi}{81}}{\frac{32\pi}{81}} = (\sqrt{3}-1)^3 = (6\sqrt{3}-10) \cong 39.2\%$

## PROBLEMA 2

Sia  $f$  la funzione definita da:

$$f(x) = \frac{x+a}{bx^2+cx+2} \quad (1)$$

### Punto 1

Si determinino i valori dei parametri che figurano nell'equazione (1) disponendo delle seguenti informazioni:

- a) i valori di  $a, b, c$  sono 0 o 1;
- b) il grafico  $G$  di  $f$  passa per  $(-1,0)$ ;
- c) la retta  $y=1$  è un asintoto di  $f$ .

La funzione  $f(x) = \frac{x+a}{bx^2+cx+2}$  è una funzione razionale fratta, per cui essa presenta un asintoto orizzontale qualora il grado del numeratore è uguale al grado del denominatore ed in tal caso la retta asintoto orizzontale è la retta parallela all'asse delle ascisse pari al rapporto tra i coefficienti di grado massimo del numeratore e denominatore della funzione stessa. Nel caso di

$f(x) = \frac{x+a}{bx^2+cx+2}$  la retta  $y=1$  è asintoto orizzontale se e solo se  $\begin{cases} b=0 \\ c=1 \end{cases}$ ; inoltre il passaggio di

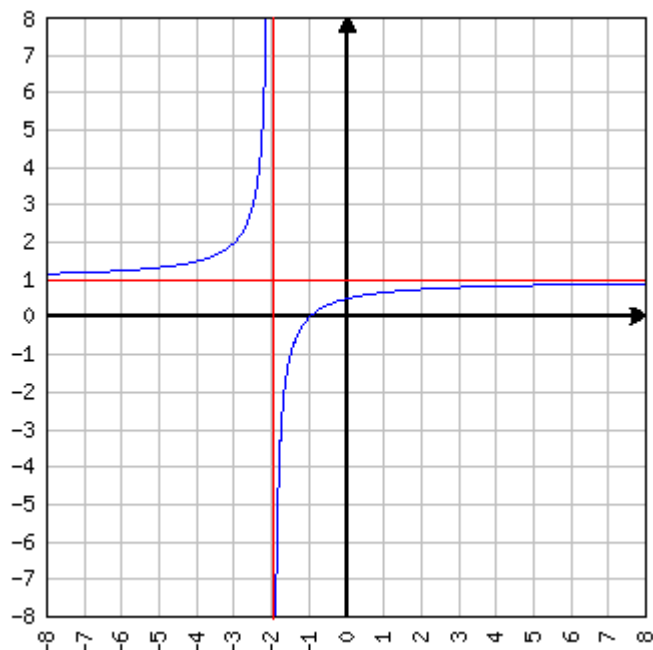
$f(x) = \frac{x+a}{bx^2+cx+2}$  per  $(-1,0)$  comporta  $a=1$ . In conclusione la funzione che soddisfa i requisiti è

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}.$$

### Punto 2

**Si disegni  $G$ .**

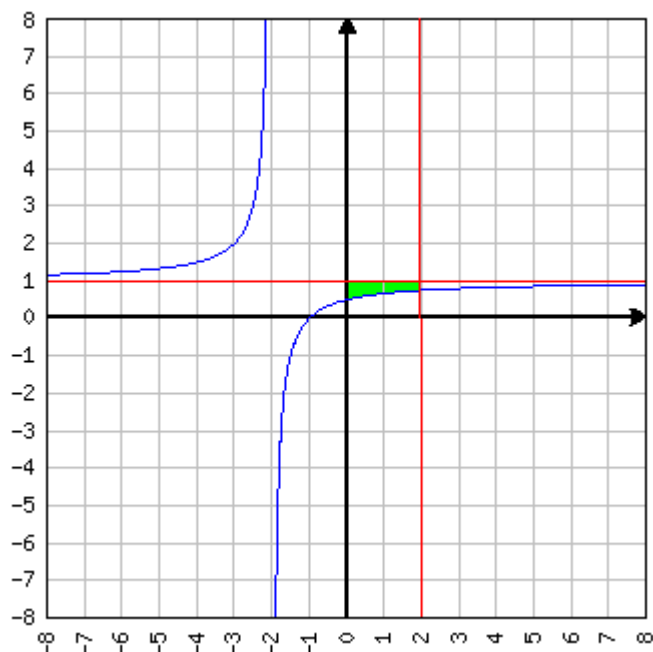
La funzione  $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$  è la nota funzione omografica di asintoto verticale  $x=-2$  ed asintoto orizzontale  $y=1$ ; essa interseca l'asse delle ascisse in  $(-1,0)$  e quello delle ordinate in  $(0, \frac{1}{2})$ , è positiva in  $(-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$  ed è sempre crescente non presentando estremi relativi né flessi. Il grafico è di seguito presentato:



*Punto 3*

**Si calcoli l'area della regione finita di piano del primo quadrante degli assi cartesiani compresa tra l'asintoto orizzontale, il grafico G e le rette  $x = 0$ ,  $x = 2$**

L'area da calcolare è raffigurata in verde nella figura sottostante:



L'area vale:

$$S = \int_0^2 \left( 1 - \frac{x+1}{x+2} \right) dx = \int_0^2 \left( \frac{1}{x+2} \right) dx = [\ln|x+2|]_0^2 = (\ln 4) - (\ln 2) = 2\ln 2 - \ln 2 = \ln 2$$

**QUESTIONARIO***Quesito 1*

**La coppia (1, 2) è la soluzione di un sistema lineare di due equazioni in due incognite. Quale può essere il sistema?**

Una delle possibili coppie di equazioni che, messe a sistema, danno come soluzione la coppia

$$(x, y) \equiv (1, 2) \text{ possono essere } \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}.$$

*Quesito 2*

**Sia  $\alpha$  tale che la funzione  $f(x) = \alpha x - \frac{x^3}{1+x^2}$  risulti crescente. Provare che  $\alpha \geq \frac{9}{8}$**

La derivata prima della funzione  $f(x) = \alpha x - \frac{x^3}{1+x^2}$  è

$$f'(x) = \alpha - \frac{3x^2(1+x^2) - x^3(2x)}{(1+x^2)^2} = \alpha - \frac{x^2(x^2+3)}{(1+x^2)^2}.$$

Affinché la funzione  $f(x) = \alpha x - \frac{x^3}{1+x^2}$  sia

crescente si deve imporre  $f'(x) \geq 0$  e cioè  $\alpha - \frac{x^2(x^2+3)}{(1+x^2)^2} \geq 0$ : bisogna quindi trovare la condizione

su  $\alpha$  che soddisfa la disequazione  $\alpha - \frac{x^2(x^2+3)}{(1+x^2)^2} \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ . La disequazione  $\alpha - \frac{x^2(x^2+3)}{(1+x^2)^2} \geq 0$ ,

poiché  $(1+x^2)^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ , equivale

$\left| \alpha(1+x^2)^2 - x^2(x^2+3) \right| \geq 0 \Leftrightarrow x^4(\alpha-1) + x^2(2\alpha-3) + \alpha \geq 0$ . Si tratta di una disequazione biquadratica risolvibile ponendo  $z = x^2$ : in tal modo la disequazione diventa di secondo grado

$z^2(\alpha-1) + z(2\alpha-3) + \alpha \geq 0$ . Essa è sempre verificata se il delta è non positivo (negativo o uguale a zero) e il coefficiente di grado massimo è strettamente positivo, quindi se

$$\begin{cases} \Delta = (2\alpha-3)^2 - 4\alpha(\alpha-1) = 9 - 8\alpha \leq 0 \\ (\alpha-1) > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8\alpha - 9 \geq 0 \\ \alpha > 1 \end{cases} \text{ da cui si ricava } \alpha \geq \frac{9}{8} \text{ come volevasi}$$

dimostrare.

*Quesito 3*

**Mostrare che le tangenti alla curva  $y = \frac{\pi \sin(x)}{x}$  in  $x = \pi$  e  $x = -\pi$  si intersecano ad angolo retto.**



Le rette tangenti in  $(\pm\pi, 0)$  hanno equazione  $y = m_{\pm}(x \pm \pi)$ . La derivata prima di  $y = \frac{\pi \sin(x)}{x}$  è

$$y' = \frac{\pi[x \cos(x) - \sin(x)]}{x^2} \quad \text{per cui} \quad \begin{cases} m_+ = y'(\pi) = -1 \\ m_- = y'(-\pi) = 1 \end{cases}; \quad \text{il prodotto tra i coefficienti angolari delle}$$

tangenti è  $m_+ \cdot m_- = -1$ , ergo le tangenti sono perpendicolari.

#### *Quesito 4*

**Nei saldi di fine stagione, un negozio ha diminuito del 30% il prezzo di listino di tutti gli articoli. Se il prezzo scontato di un abito è di 275 euro quale era il suo prezzo di listino?**

Il prezzo di listino  $p$  si ricava dall'equazione  $p - 0.3p = 275$  da cui

$$p = \frac{275}{0.7} = \frac{2750}{7} \cong 392.86 \text{ euro}.$$

#### *Quesito 5*

**Calcolare:**

$$\int_0^{\pi} e^x \cos(x) dx$$

Si calcola innanzitutto l'integrale indefinito integrando due volte per parti:

$$\begin{aligned} \int e^x \cos(x) dx &= e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) dx = \\ &= e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx \Rightarrow \end{aligned}$$

$$2 \int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) \Rightarrow \int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x}{2} [\cos(x) + \sin(x)] + k$$

$$\text{Quindi } \int_0^{\pi} e^x \cos(x) dx = \left[ \frac{e^x}{2} [\cos(x) + \sin(x)] \right]_0^{\pi} = \frac{e^{\pi}}{2} \cdot (-1) - \frac{1}{2} \cdot (1) = -\left( \frac{e^{\pi} + 1}{2} \right)$$

#### *Quesito 6*

**Si dica quante sono le soluzioni reali dell'equazione  $\frac{x}{10} = \sin(x)$  e si indichi per ciascuna di esse un intervallo numerico che la comprende.**

Osserviamo innanzitutto che l'equazione  $\frac{x}{10} = \sin(x)$ :

1. presenta come soluzione banale  $x = 0$ ;
2. ha soluzioni reali se e solo se  $-10 \leq x \leq 10$  in quanto la funzione seno è una funzione limitata in  $[-1, 1]$ ;
3. presenta, qualora ve ne fossero, soluzioni simmetriche, in quanto se  $\bar{x}$  è soluzione anche

$$(-\bar{x}) \text{ lo è in quanto } \frac{(-\bar{x})}{10} = -\sin(\bar{x}) = \sin(-\bar{x})$$

Dalle considerazioni di cui sopra deduciamo che lo studio degli zeri di  $\frac{x}{10} = \sin(x)$  può essere effettuato nell'intervallo  $(0,10]$ , dal momento che le soluzioni in  $[-10,0)$  si ricavano da quelle trovate in  $(0,10]$  cambiandole di segno.

Lo studio delle soluzioni dell'equazione  $\frac{x}{10} = \sin(x)$  in  $(0,10]$  equivale allo studio degli zeri della funzione  $y = \sin(x) - \frac{x}{10}$  in  $(0,10]$ . Vediamo innanzitutto dove la funzione  $y = \sin(x) - \frac{x}{10}$  è

crescente. La derivata prima è  $y' = \cos(x) - \frac{1}{10}$  per cui

$$y' > 0 \rightarrow \cos(x) > \frac{1}{10} \Rightarrow 2k\pi < x < \arccos\left(\frac{1}{10}\right) + 2k\pi \vee 2\pi - \arccos\left(\frac{1}{10}\right) + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$

$$y' < 0 \rightarrow \cos(x) < \frac{1}{10} \Rightarrow \arccos\left(\frac{1}{10}\right) + 2k\pi < x < 2\pi - \arccos\left(\frac{1}{10}\right) + 2k\pi$$

$$y' = 0 \rightarrow \cos(x) = \frac{1}{10} \Rightarrow x = \arccos\left(\frac{1}{10}\right) + 2k\pi \vee x = 2\pi - \arccos\left(\frac{1}{10}\right) + 2k\pi$$

Nell'intervallo  $(0,10]$  si deduce che:

$$y' > 0 \rightarrow \cos(x) > \frac{1}{10} \Rightarrow 0 < x < \arccos\left(\frac{1}{10}\right) \vee 2\pi - \arccos\left(\frac{1}{10}\right) < x < 2\pi \vee 2\pi < x < 2\pi + \arccos\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$y' < 0 \rightarrow \arccos\left(\frac{1}{10}\right) < x < 2\pi - \arccos\left(\frac{1}{10}\right) \vee 2\pi + \arccos\left(\frac{1}{10}\right) < x \leq 10$$

$$y' = 0 \rightarrow x = \arccos\left(\frac{1}{10}\right) \vee x = 2\pi - \arccos\left(\frac{1}{10}\right) \vee x = 2\pi + \arccos\left(\frac{1}{10}\right)$$

In particolare  $x = \arccos\left(\frac{1}{10}\right)$  e  $x = 2\pi + \arccos\left(\frac{1}{10}\right)$  sono ascisse di massimo relativo mentre

$x = 2\pi - \arccos\left(\frac{1}{10}\right)$  è ascissa di minimo relativo.

Ora in  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$  la funzione  $y = \sin(x) - \frac{x}{10}$  è strettamente decrescente e

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{20} > 0, y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 - \frac{3\pi}{20} < 0 \text{ per cui per il primo teorema degli zeri esiste uno zero}$$

della funzione  $y = \sin(x) - \frac{x}{10}$  in  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ; analogamente in  $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$  la funzione  $y = \sin(x) - \frac{x}{10}$

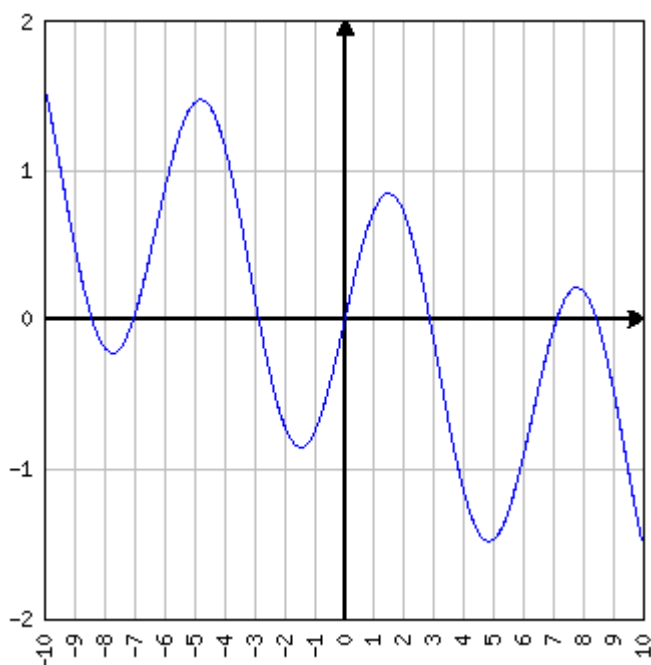
è strettamente crescente e  $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 - \frac{3\pi}{20} < 0, y\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$  per cui per il primo teorema

degli zeri esiste uno zero della funzione  $y = \sin(x) - \frac{x}{10}$  in  $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$ ; analogamente in  $\left[\frac{5\pi}{2}, 10\right]$  la funzione  $y = \sin(x) - \frac{x}{10}$  è strettamente decrescente e  $y\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$ ,  $y(10) = \sin(10) - 1 < 0$  per cui per il primo teorema degli zeri esiste uno zero della funzione  $y = \sin(x) - \frac{x}{10}$  in  $\left(\frac{5\pi}{2}, 10\right)$ .  
 Nell'intervallo  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  si può applicare il teorema degli zeri e otteniamo la soluzione banale  $x = 0$ .

In conclusione gli zeri dell'equazione  $\frac{x}{10} = \sin(x)$  sono 7:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ x_2 &\in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), x_3 \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right), x_4 \in \left(\frac{5\pi}{2}, 10\right), \\ x_5 &\in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), x_6 \in \left(-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right), x_7 \in \left(-10, -\frac{5\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Il grafico sottostante della funzione  $y = \sin(x) - \frac{x}{10}$  mostra quanto affermato.



### Quesito 7

Se  $\tan(\alpha)$  e  $\tan(\beta)$  sono radici di  $x^2 - px + q = 0$  e  $\cot g(\alpha)$  e  $\cot g(\beta)$  sono radici di  $x^2 - rx + s = 0$ , quanto vale il prodotto  $rs$  espresso in funzione di  $p$  e  $q$ ?

Se  $\tan(\alpha)$  e  $\tan(\beta)$  sono radici di  $x^2 - px + q = 0$  si ha  $\begin{cases} p = \tan(\alpha) + \tan(\beta) \\ q = \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta) \end{cases}$  mentre se  $\cot g(\alpha)$  e

$\cot g(\beta)$  sono radici di  $x^2 - rx + s = 0$  si ha  $\begin{cases} r = \cot g(\alpha) + \cot g(\beta) \\ s = \cot g(\alpha) \cdot \cot g(\beta) \end{cases}$ .

$$\text{Il sistema } \begin{cases} r = \cot g(\alpha) + \cot g(\beta) \\ s = \cot g(\alpha) \cdot \cot g(\beta) \end{cases} \text{ equivale a } \begin{cases} r = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{\tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)} \\ s = \frac{1}{\tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = \frac{p}{q} \\ s = \frac{1}{q} \end{cases} \Rightarrow r \cdot s = \frac{p}{q^2}$$

### *Quesito 8*

**Un professore interroga i suoi alunni a due per volta. Stabilire quante possibili coppie diverse può interrogare, sapendo che la classe è di 20 studenti.**

Il numero di coppie diverse è dato da  $\binom{20}{2} = \frac{20!}{2!18!} = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190$ .