SESSIONE SUPPLETIVA
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
a.s. 2003/2004
CORSO SPERIMENTALE P.N.I.
Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva K di equazione:

[1] $$y = \frac{2x(6-x)}{2+x}.$$

a) Disegnarne l'andamento, indicando con A il suo punto di massimo relativo.

b) Calcolare quanti punti, aventi le coordinate del tipo $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, dove a, b sono numeri interi, appartengono alla regione piana (contorno compreso) delimitata dall'asse x e dalla curva K.

c) Fra i triangoli isosceli aventi il vertice propriamente detto in A e la base sull'asse x, determinare quello il cui perimetro è 16.

d) Calcolare le aree delle due regioni in cui la curva K divide il triangolo trovato sopra.

e) Spiegare perché la funzione [1] non è invertibile nel suo dominio. Se si restringe convenientemente questo dominio si ottiene una funzione invertibile? Qual è in tal caso la funzione inversa?

Soluzione

a)

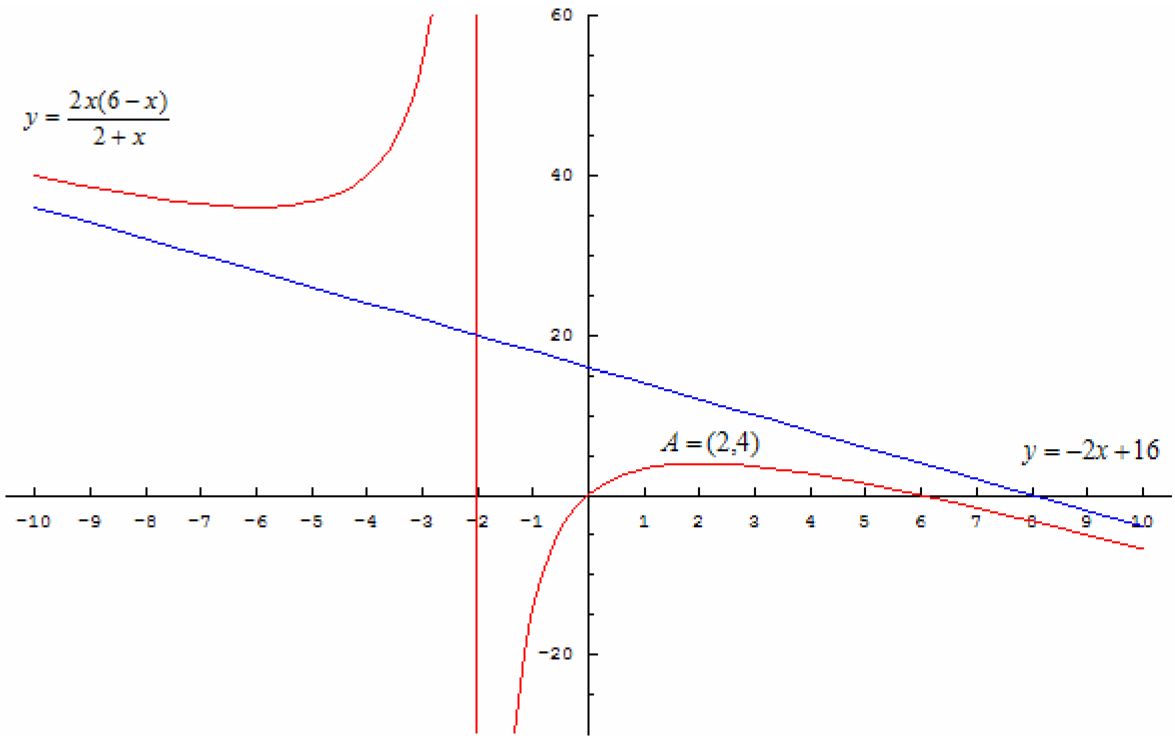
Studiamo la funzione $y = \frac{2x(6-x)}{2+x}$:

- Dominio: $x \neq -2 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-2) \cup (-2,+\infty)$;
- Intersezioni asse delle ascisse: $y = \frac{2x(6-x)}{2+x} = 0 \Rightarrow x = 0, x = 6$;
- Intersezione asse ordinate: $x = 0 \Rightarrow y = 0$;
- Parità o disparità: non è una funzione né pari né dispari;
- Positività: la discutiamo discutendo separatamente la positività del numeratore e del denominatore e poi mettendo i risultati su un'unica retta : il numeratore $N(x) = 2x(6-x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 6$ mentre il denominatore $D(x) = x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$, per cui $y = \frac{2x(6-x)}{2+x} > 0 \Leftrightarrow x < -2 \cup 0 < x < 6$;
- Asintoti verticali: $\lim_{x \to -2^+} \frac{2x(6-x)}{2+x} = \frac{-16}{0^+} = -\infty$, $\lim_{x \to -2^-} \frac{2x(6-x)}{2+x} = \frac{-16}{0^-} = +\infty$ per cui $x = -2$ è

asintoto verticale;

- Asintoti orizzontali: non ce ne sono dal momento che $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x(6-x)}{2+x}=\mp\infty$;
- Asintoti obliqui: hanno equazione $y=mx+q$ con $m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2x(6-x)}{2+x}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2(6-x)}{x+2}=-2, q=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x(6-x)}{2+x}+2x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{16x}{2+x}\right]=16$ per cui l'asintoto obliquo è $y=-2x+16$;
- Crescenza e decrescenza: la derivata prima è $f'(x)=\frac{(12-4x)(x+2)-2x(6-x)}{(x+2)^2}=\frac{-2(x^2+4x-12)}{(x+2)^2}>0 \Leftrightarrow x^2+4x-12<0 \cup x\neq -2$. Ora $x^2+4x-12<0 \Leftrightarrow -6<x<2$ per cui la funzione è crescente negli intervalli $(-\infty,-6)\cup(-6,-2)\cup(-2,2)$. La derivata seconda è $f''(x)=-\frac{64}{(x+2)^3}$ per cui non si annulla mai da cui si deduce che la funzione di partenza non ha flessi. Inoltre $f''(-6)=1>0, f''(2)=-1<0$ per cui $(-6,36)$ è un punto di minimo e $A=(2,4)$ è il punto di massimo relativo.

Il grafico è sotto presentato:



b)

Per ipotesi sappiamo che a,b sono numeri interi, per cui le condizioni da imporre sono innanzitutto $0 \le \frac{a}{2} \le 6 \Leftrightarrow 0 \le a \le 12$ e $0 \le \frac{b}{2} \le f(x) \Leftrightarrow 0 \le b \le 2f(x)$. Inoltre i punti che soddisfano la condizione $0 \le \frac{a}{2} \le 6$ con a intero sono 13 e sono $\left(0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots\cdots, \frac{11}{2}, 6\right)$.

Quindi fissata l'ascissa $x = \frac{a}{2}$, dobbiamo calcolare i punti del tipo $\left(\frac{a}{2}, b\right)$ con $0 \le \frac{b}{2} \le f\left(\frac{a}{2}\right) \Leftrightarrow 0 \le b \le 2f\left(\frac{a}{2}\right)$. Questi punti sono in numero $N\left(\frac{a}{2}\right) = 1 + \mathrm{int}\left(2f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$ dove la funzione $\mathrm{int}(\cdot)$ è la funzione che restituisce la parte intera del proprio argomento.

Ora consideriamo le differenti 13 ascisse:

1. $\frac{a}{2} = 0 \to N(0) = 1 + \mathrm{int}(2f(0)) = 1 + 0 = 1$;
2. $\frac{a}{2} = \frac{1}{2} \to N\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \mathrm{int}\left(2f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 1 + \mathrm{int}(4.4) = 1 + 4 = 5$;
3. $\frac{a}{2} = 1 \to N(1) = 1 + \mathrm{int}(2f(1)) = 1 + \mathrm{int}(6.6) = 1 + 6 = 7$;
4. $\frac{a}{2} = \frac{3}{2} \to N\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + \mathrm{int}\left(2f\left(\frac{3}{2}\right)\right) = 1 + \mathrm{int}(7.7) = 1 + 7 = 8$;
5. $\frac{a}{2} = 2 \to N(2) = 1 + \mathrm{int}(2f(2)) = 1 + \mathrm{int}(8) = 1 + 8 = 9$;
6. $\frac{a}{2} = \frac{5}{2} \to N\left(\frac{5}{2}\right) = 1 + \mathrm{int}\left(2f\left(\frac{5}{2}\right)\right) = 1 + \mathrm{int}(7.7) = 1 + 7 = 8$;
7. $\frac{a}{2} = 3 \to N(3) = 1 + \mathrm{int}(2f(3)) = 1 + \mathrm{int}(7.2) = 1 + 7 = 8$;
8. $\frac{a}{2} = \frac{7}{2} \to N\left(\frac{7}{2}\right) = 1 + \mathrm{int}\left(2f\left(\frac{7}{2}\right)\right) = 1 + \mathrm{int}(6.3) = 1 + 6 = 7$;
9. $\frac{a}{2} = 4 \to N(4) = 1 + \mathrm{int}(2f(4)) = 1 + \mathrm{int}(5.3) = 1 + 5 = 6$;
10. $\frac{a}{2} = \frac{9}{2} \to N\left(\frac{9}{2}\right) = 1 + \mathrm{int}\left(2f\left(\frac{9}{2}\right)\right) = 1 + \mathrm{int}(4.1) = 1 + 4 = 5$;
11. $\frac{a}{2} = 5 \to N(4) = 1 + \mathrm{int}(2f(5)) = 1 + \mathrm{int}(2.8) = 1 + 2 = 3$;

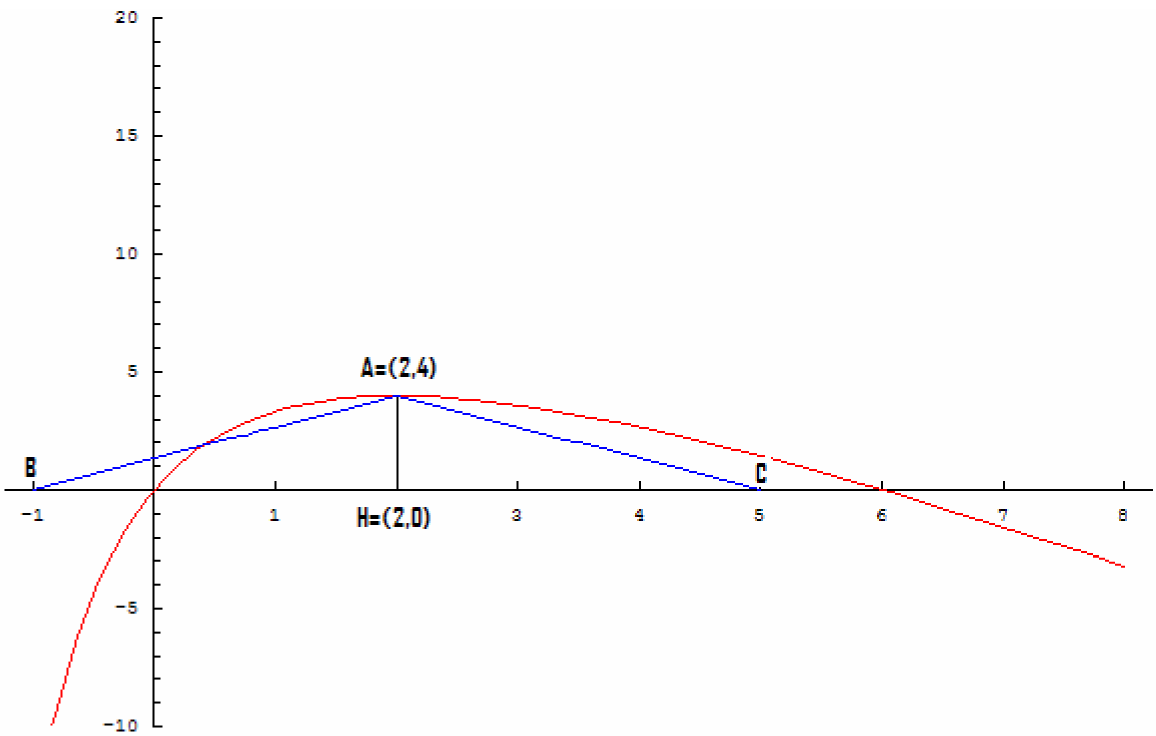
12. $\frac{a}{2}=\frac{11}{2} \to N\left(\frac{11}{2}\right)=1+\text{int}\left(2f\left(\frac{11}{2}\right)\right)=1+\text{int}(1.4)=1+1=2$;

13. $\frac{a}{2}=6 \to N(6)=1+\text{int}(2f(6))=1+\text{int}(0)=1$.

Ora sommando tutti questi punti si ha : $N_{TOT} = 1+5+7+8+9+8+8+7+6+5+3+2+1 = 70$ per cui esisteranno 70 punti del tipo $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$ e compresi tra l'asse delle ascisse ed il grafico della funzione con a,b numeri interi.

c)

Consideriamo la figura seguente:



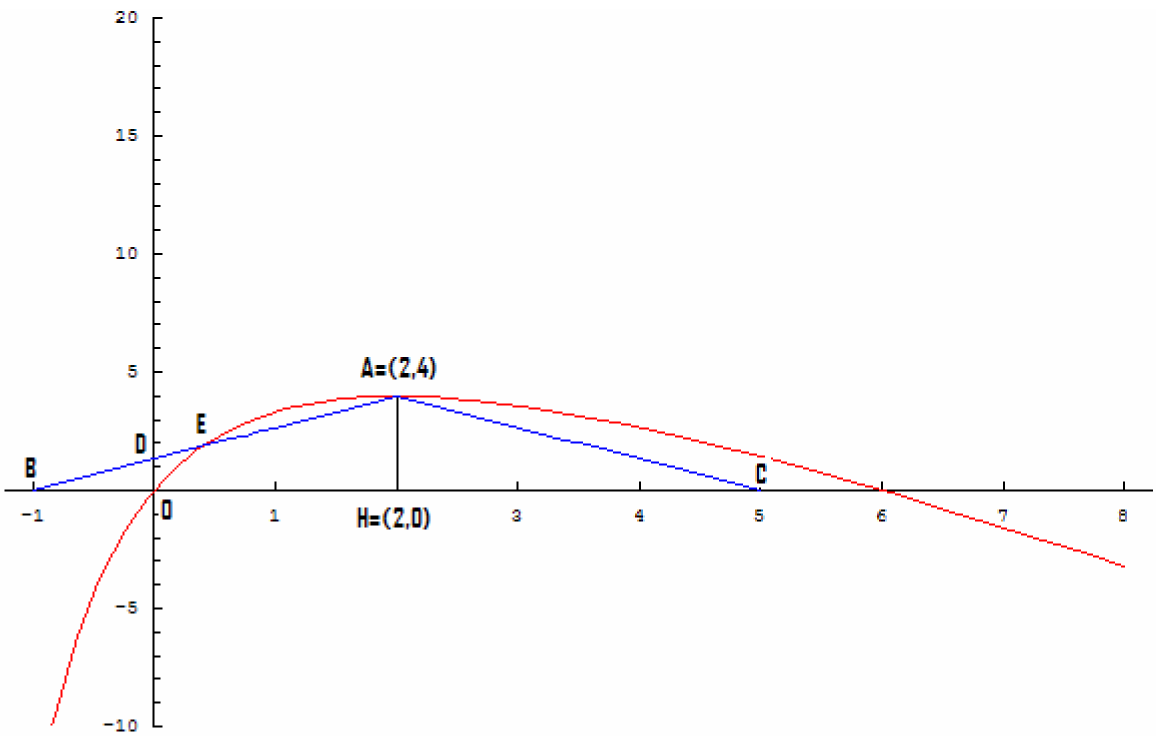
Il punto B ha coordinate generiche $B=(x,0)$. Il punto C è il simmetrico di B rispetto alla retta $x=2$ per cui avrà ordinata nulla ed ascissa pari a $x_C=2*(2)-x=4-x$ per cui $C=(4-x,0)$. Ora dobbiamo imporre che $2AB+2BH=16 \Leftrightarrow AB+BH=8$. Ora $AB=\sqrt{BH^2+AH^2}$ dove $BH=|x-2|$ ed $AH=4$, per cui l'equazione diventa $\sqrt{(x-2)^2+16}+|x-2|=8$. In realtà essendo il punto $B=(x,0)$ alla sinistra di $H=(2,0)$ si ha certamente $x<2 \Rightarrow |x-2|=2-x$ per cui $\sqrt{(x-2)^2+16}+|x-2|=8 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+16}+(2-x)=8 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+16}=x+6$. Ora l'equazione da risolvere è irrazionale e le soluzioni scaturiscono dalla risoluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} x+6\geq 0 \\ (x-2)^2+16=(x+6)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -6 \\ x^2-4x+20=x^2+12x+36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -6 \\ 16x=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -6 \\ x=-1 \end{cases}$$

La soluzione $x=-1$ è accettabile per cui i restanti due vertici del triangolo isoscele sono $B=(1,0), C=(5,0)$.

d)

Si consideri la figura sottostante:



Dobbiamo calcolare $S_{BOE}=S_{BOD}+S_{DOE}$. Dobbiamo calcolare i punti D, E. La retta BA ha equazione : $\frac{y}{4}=\frac{x+1}{3} \Leftrightarrow y=\frac{4}{3}(x+1)$ per cui il punto D appartiene alla retta $y=\frac{4}{3}(x+1)$ ed ha ascissa nulla per cui $D=\left(0,\frac{4}{3}\right)$, mentre il punto E scaturisce dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} y=\frac{2x(6-x)}{2+x} \\ y=\frac{4}{3}(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2x(6-x)}{2+x}=\frac{4}{3}(x+1) \Leftrightarrow 5x^2-12x+4=0 \Leftrightarrow x=\frac{6\pm 4}{5} \Rightarrow x_1=2, x_2=\frac{2}{5}$$

e poiché l'ascissa di E è alla sinistra dell'ascissa del massimo si ha $E=\left(\frac{2}{5},\frac{28}{15}\right)$. Quindi:

$S_{DOE}=\int_0^{\frac{2}{5}}\left[\frac{4}{3}(x+1)-\frac{2x(6-x)}{2+x}\right]dx$. Ora possiamo scrivere $y=\frac{2x(6-x)}{2+x}=16-2x-\frac{32}{x+2}$ per cui

$$S_{DOE}=\int_0^{\frac{2}{5}}\left[\frac{4}{3}(x+1)-\frac{2x(6-x)}{2+x}\right]dx=\int_0^{\frac{2}{5}}\left[\frac{4}{3}(x+1)+2x-16+\frac{32}{x+2}\right]dx=$$

$$=\int_0^{\frac{2}{5}}\left[\frac{10}{3}x-\frac{44}{3}+\frac{32}{x+2}\right]dx=\left[\frac{5}{3}x^2-\frac{44}{3}x+32\ln|x+2|\right]_0^{\frac{2}{5}}=$$

$$=\frac{4}{15}-\frac{88}{15}+32\ln\left(\frac{12}{5}\right)-32\ln(2)=32\ln\left(\frac{6}{5}\right)-\frac{28}{5}$$

Inoltre $S_{BOD}=\frac{1}{2}(1)\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{2}{3}$ per cui $S_{BOE}=S_{BOD}+S_{DOE}=32\ln\left(\frac{6}{5}\right)-\frac{28}{5}+\frac{2}{3}=32\ln\left(\frac{6}{5}\right)-\frac{74}{15}$.

L'altra area richiesta è

$$S_{DEAC}=S_{ABC}-S_{BOE}=\frac{1}{2}(6)(4)-\left[32\ln\left(\frac{6}{5}\right)-\frac{74}{15}\right]=12+\frac{74}{15}-32\ln\left(\frac{6}{5}\right)=\frac{254}{15}-32\ln\left(\frac{6}{5}\right).$$

e)

Una funzione è invertibile se è biiettiva, cioè iniettiva e suriettiva. Nel nostro caso la funzione non è iniettiva; infatti in corrispondenza delle ascisse $x=0, x=6$ viene fornita la stessa ordinata nulla. Quindi la non iniettività comporta la non invertibilità nel dominio. Tuttavia se si restringe il dominio e si considerano intervalli dove l'iniettività è garantita, allora sarà garantita anche la invertibilità. Riconsideriamo il grafico della funzione: se lo osserviamo bene si notano almeno 4 sottointervalli in cui la funzione è iniettiva. Infatti l'iniettività è garantita in $D_1=\left]-\infty,-6\right]\cup\left]-2,2\right], D_2=\left]-\infty,-6\right]\cup\left[2,+\infty\right[, D_3=\left[-6,-2\right[\cup\left[-2,2\right[, D_4=\left[-6,-2\right[\cup\left[2,+\infty\right[$. In questi sottointervalli possiamo invertire la funzione e si avrà:

$$y=\frac{2x(6-x)}{2+x}\Leftrightarrow 2x^2+x(y-12)+2y=0\Leftrightarrow$$
$$x=\frac{12-y\pm\sqrt{(12-y)^2-16y}}{4}=\frac{12-y\pm\sqrt{y^2-40y+144}}{4}$$

Ora già dal segno $\pm$ si deduce la non invertibilità della funzione in tutto il suo dominio. Inoltre affinché la funzione inversa $x=\frac{12-y\pm\sqrt{y^2-40y+144}}{4}$ sia definita nel dominio di invertibilità dobbiamo imporre $y^2-40y+144\geq 0\Leftrightarrow(y-4)(y-36)\geq 0\Leftrightarrow y\leq 4\cup y\geq 36$ e così abbiamo trovato anche il condominio della funzione di partenza. Infatti i punti $(2,4),(-6,36)$ sono i punti rispettivamente di massimo e minimo relativo della funzione $y=\frac{2x(6-x)}{2+x}$ come già precedentemente calcolato; e non poteva essere altrimenti perché per una funzione invertibile il condominio della funzione di partenza coincide col dominio della sua inversa.

PROBLEMA 2.

Nel Liceo Scientifico "Torricelli" vi sono 4 classi quinte, i cui alunni sono distribuiti per sezione e per sesso in base alla seguente tabella:

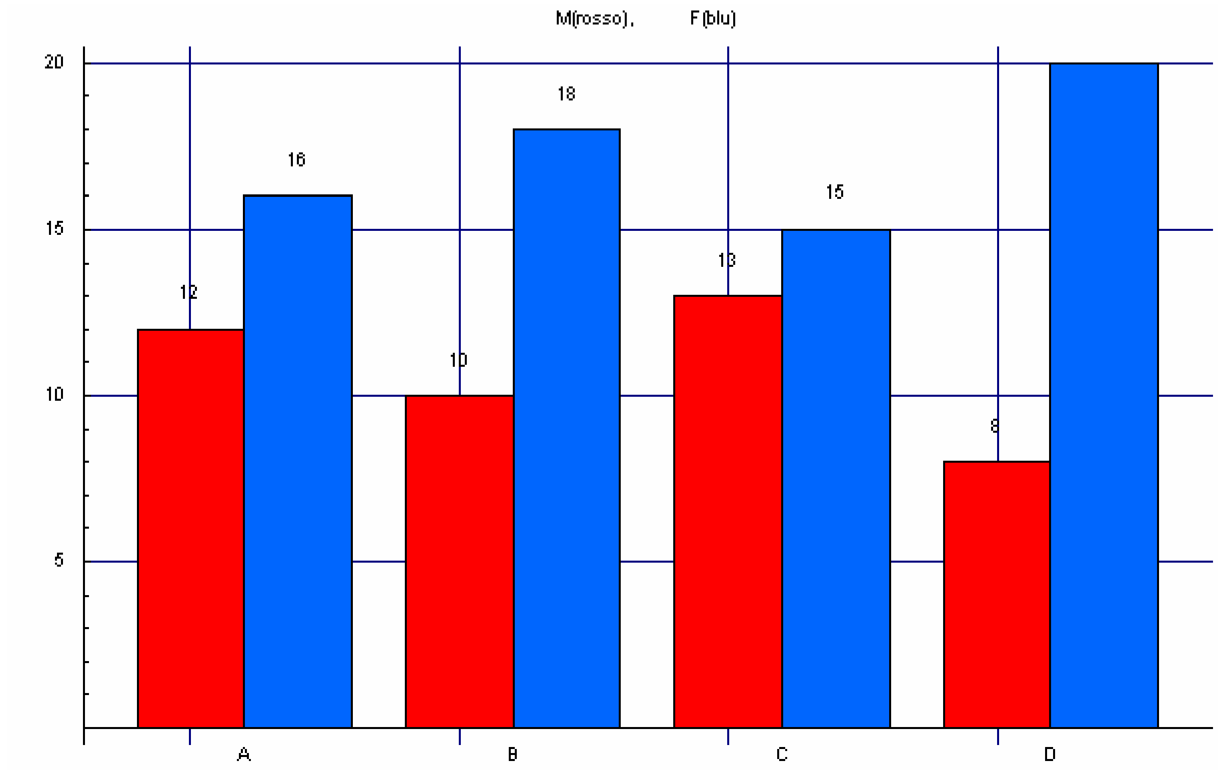
sezione sesso	A	B	C	D
M	12	10	13	8
F	16	18	15	20

a) Rappresentare graficamente la situazione per mezzo di un istogramma.
b) Calcolare le distribuzioni marginali degli studenti per sezione e per sesso.
c) Calcolare la probabilità che, scelta a caso una coppia di studenti della 5aA, questa sia formata da alunni di sesso:
1) maschile, 2) femminile, 3) differente.
Quanto vale la somma delle tre probabilità trovate?.
d) Calcolare la probabilità che, scelti a caso una classe e, in essa, una coppia di studenti, questa sia formata da alunni di sesso differente.
e) Scelto a caso un alunno di quinta del Liceo in questione e constatato che si tratta di uno studente di sesso maschile, calcolare la probabilità che esso provenga dalla 5aD.

Soluzione

a)

L'istogramma richiesto è sotto rappresentato:



b)

Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di maschi e di femmine, ed Y la variabile aleatoria rappresentante le sezioni (A,B,C,D). Quindi la variabile aleatoria X ha come alfabeto $A_X = \{M, F\}$ mentre la variabile aleatoria Y ha come alfabeto $A_Y = \{A, B, C, D\}$.

Esprimendo le probabilità come casi favorevoli su quelli totali, in accordo con l'interpretazione frequestista, si ha:

$$p_X(x) = \frac{43}{112}\delta(x-M) + \frac{69}{112}\delta(x-F) = \begin{cases} \frac{43}{112} & x = M \\ \frac{69}{112} & x = F \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \frac{1}{4}\delta(y-A) + \frac{1}{4}\delta(y-B) + \frac{1}{4}\delta(y-C) + \frac{1}{4}\delta(y-D) = \begin{cases} \frac{1}{4} & y = A \\ \frac{1}{4} & y = B \\ \frac{1}{4} & y = C \\ \frac{1}{4} & y = D \end{cases}$$

dove $\delta(a) = \begin{cases} 1 & a = 0 \\ 0 & a \neq 0 \end{cases}$.

Indichiamo con $p_{XY}(x, y) = \Pr[X = x, Y = y]$ la probabilità congiunta che uno studente sia di un dato sesso e sia di una assegnata sezione. Essa la si può calcolare come prodotto tra la probabilità di appartenere ad una data sezione e la probabilità di essere di un dato sesso in quella sezione. Le possibili combinazioni sono ovviamente 2*4=8, per cui si ha:

$$\begin{aligned}
p_{XY}(M, A) &= \frac{12}{28} * \frac{1}{4} = \frac{3}{28},\ p_{XY}(F, A) = \frac{16}{28} * \frac{1}{4} = \frac{1}{7} \\
p_{XY}(M, B) &= \frac{10}{28} * \frac{1}{4} = \frac{5}{56},\ p_{XY}(F, B) = \frac{18}{28} * \frac{1}{4} = \frac{9}{56} \\
p_{XY}(M, C) &= \frac{13}{28} * \frac{1}{4} = \frac{13}{112},\ p_{XY}(F, C) = \frac{15}{28} * \frac{1}{4} = \frac{15}{112} \\
p_{XY}(M, D) &= \frac{8}{28} * \frac{1}{4} = \frac{1}{14},\ p_{XY}(F, D) = \frac{20}{28} * \frac{1}{4} = \frac{5}{28}
\end{aligned}$$

Ora ricordando che una distribuzione marginale non è altro che la somma della distribuzione congiunta al variare dei valori assunti dalla variabile (o delle variabili nel caso che le variabili aleatorie siano in numero maggiore di 2) di cui non si vuole conoscere la distribuzione marginale, le distribuzioni marginali saranno:

$$p_X(x=M)=\sum_{x=M,y\in A_Y} p_{XY}(x,y)=\frac{3}{28}+\frac{5}{56}+\frac{13}{112}+\frac{1}{14}=\frac{43}{112}$$
$$p_X(x=F)=\sum_{x=F,y\in A_Y} p_{XY}(x,y)=\frac{1}{7}+\frac{9}{56}+\frac{15}{112}+\frac{5}{28}=\frac{69}{112}$$
$$p_Y(y=A)=\sum_{y=A,x\in A_X} p_{XY}(x,y)=\frac{3}{28}+\frac{1}{7}=\frac{1}{4}$$
$$p_Y(y=B)=\sum_{y=B,x\in A_X} p_{XY}(x,y)=\frac{5}{56}+\frac{9}{56}=\frac{1}{4}$$
$$p_Y(y=C)=\sum_{y=C,x\in A_X} p_{XY}(x,y)=\frac{13}{112}+\frac{15}{112}=\frac{1}{4}$$
$$p_Y(y=D)=\sum_{y=D,x\in A_X} p_{XY}(x,y)=\frac{1}{14}+\frac{5}{28}=\frac{1}{4}$$

Quindi le distribuzione marginali coincidono con le singole probabilità ma $p_{XY}(x,y)\neq p_X(x)p_Y(y)$, cioè le due variabili aleatorie X ed Y sono dipendenti.

c)

Sappiamo che nella sezione A ci sono 12 maschi e 16 femmine, per cui la probabilità che il primo studente della coppia della 5ªA sia maschio è $p_{1M}=\frac{12}{28}$, mentre la probabilità che pure il secondo sia maschio è $p_{2M}=\frac{11}{27}$, per cui la probabilità che entrambi siano maschi è $p_{MM}=p_{1M}*p_{2M}=\left(\frac{12}{28}\right)\left(\frac{11}{27}\right)=\frac{11}{63}$. Analogamente $p_{FF}=\left(\frac{16}{28}\right)\left(\frac{15}{27}\right)=\frac{20}{63}$. Inoltre la probabilità che la coppia sia mista, cioè composta da un maschio e da una femmina è $p_{MF\cup FM}=\frac{12}{28}*\frac{16}{27}+\frac{16}{28}*\frac{12}{27}=\frac{16}{63}+\frac{16}{63}=\frac{32}{63}$. Quindi le probabilità richieste sono $\frac{11}{63},\frac{20}{63},\frac{32}{63}$ la cui somma è pari a 1 come era lecito attendersi.

d)

Sia F l’evento che identifica una coppia di sesso differente di una data sezione. Allora la probabilità dell’evento E richiesto è: $P(E)=P(A)P(F\mid A)+P(B)P(F\mid B)+P(C)P(F\mid C)+P(D)P(F\mid D)$.

Dal punto precedente sappiamo che $P(F\mid A)=\frac{32}{63}$ ed analogamente calcoliamo le altre probabilità:

$$P(F \mid B) = \frac{10}{28} * \frac{18}{27} + \frac{18}{28} * \frac{10}{27} = \frac{180}{378}$$
$$P(F \mid C) = \frac{13}{28} * \frac{15}{27} + \frac{15}{28} * \frac{13}{27} = \frac{165}{378}$$
$$P(F \mid D) = \frac{8}{28} * \frac{20}{27} + \frac{20}{28} * \frac{8}{27} = \frac{160}{378}$$

Quindi $P(E) = \frac{1}{4}\left(\frac{32}{63} + \frac{180}{378} + \frac{165}{378} + \frac{160}{378}\right) = \frac{727}{1512}$.

e)

Sia T l'evento che identifica uno studente della 5^{a}D. Dobbiamo calcolare $P(T \mid M)$. Nella 5^{a}D ci sono 8 maschi su 43 per cui $P(T \mid M) = \frac{8}{43}$.

QUESTIONARIO

1. La funzione $f(x)=\dfrac{3x-2\sin(x)}{2x-3\sin(x)}$ è, per $x\to+\infty$, una forma indeterminata di tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Il limite della funzione, per $x\to+\infty$

A) non esiste; B) è $\dfrac{3}{2}$; C) è $\dfrac{2}{3}$; D) è un valore diverso da $\dfrac{3}{2}$ e $\dfrac{2}{3}$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

2. Determinare il più grande valore di n per cui l'espressione numerica $\sum_{k=5}^{n} k$ non supera 10000.

3. Sia F(x) una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto a. Si sa che se F'(a)>0 allora F(x) è crescente in a, mentre se F'(a)<0 allora F(x) è decrescente in a. Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché F(x) ammetta in a un massimo relativo è che risulti F'(a)=0 ed F"(a)<0.

4. Risolvere la seguente disequazione in x:

$$(\ln x)^2 \geq \ln(x^2).$$

5. Considerato un triangolo equilatero di altezza h e detto P un suo qualsiasi punto interno, indicare con x, y, z le distanze di P dai lati del triangolo. La somma x+y+z risulta:

[A] sempre maggiore di h;
[B] sempre minore di h;
[C] sempre uguale ad h;
[D] a volte maggiore di h, a volte minore, a volte uguale.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

6. Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si consideri l'equazione:

$x y + p x + q y + r = 0$.

Determinare sotto quali condizioni per i coefficienti p, q, r (non tutti nulli) essa rappresenta l'insieme di due rette.

7. Descrivere tutte le isometrie dirette che mutano un tetraedro regolare in sé.

8. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le affinità di equazioni:

$$\begin{cases} X = ax+by \\ Y = \dfrac{1}{2}bx-2 \end{cases}.$$

Tra di esse determinare quella che trasforma il punto (1, 0) nel punto (1, -1) e stabilire se ammette rette unite.

9. Due giocatori, A e B, giocano a "Testa o Croce" con una moneta le cui facce hanno la stessa probabilità di uscire. Ciascuno di loro punta la somma S. Chi vince porta via l'intera posta. Il gioco si svolge con la seguente regola: «Il giocatore A lancia la moneta: se esce "Testa" vince, altrimenti il gioco passa a B. Questi, a sua volta, lancia la moneta e vince se viene "Croce", in caso

contrario il gioco ritorna ad A, che ripete il lancio e vince se viene “Testa”. In caso contrario il gioco ripassa a B, che vince se viene “Croce”. Se B non vince il gioco ha termine e ciascuno dei due giocatori riprende la somma che aveva puntato». Il gioco è equo?

10. Dopo avere spiegato perché la funzione $f(x)=\frac{1}{x-\cos(x)}$ è positiva nell’intervallo [1, 2], esplicitare un algoritmo idoneo a calcolare un valore approssimato dell’area situata sotto il grafico della funzione relativamente all’intervallo considerato.

Soluzione

1)

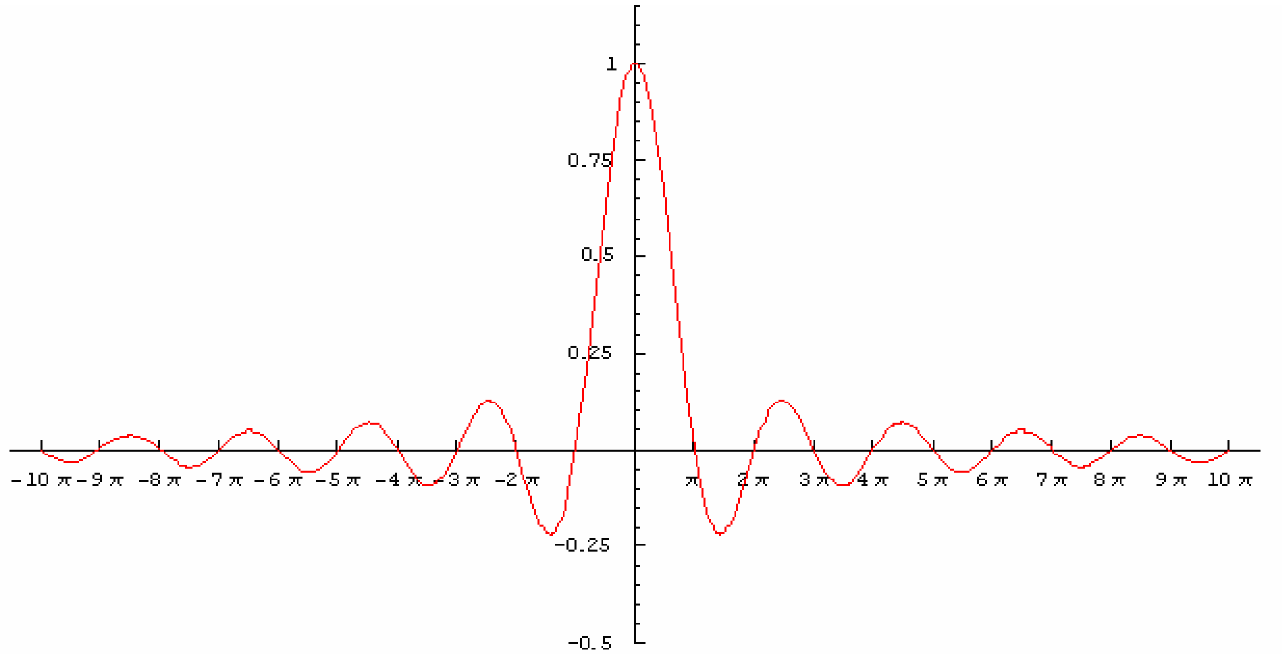
Il limite da calcolare è il seguente: $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2\sin(x)}{2x-3\sin(x)}$. Esso può essere così riscritto:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2\sin(x)}{2x-3\sin(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left[3-2\frac{\sin(x)}{x}\right]}{x\left[2-3\frac{\sin(x)}{x}\right]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[3-2\frac{\sin(x)}{x}\right]}{\left[2-3\frac{\sin(x)}{x}\right]}$$

Ora ricordando che $-1\le\sin(x)\le 1\Rightarrow -\frac{1}{x}\le\frac{\sin(x)}{x}\le\frac{1}{x}$ e passando al limite si ha

$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\le\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sin(x)}{x}\right]\le\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\Rightarrow 0\le\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sin(x)}{x}\right]\le 0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sin(x)}{x}\right]=0$ per il teorema del confronto o dei carabinieri.

Un altro modo di proseguire è ricordare la funzione seno cardinale ed in particolare il suo andamento:



Da esso si nota che $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sin(x)}{x}\right]=0$ come già dimostrato.

Quindi $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2\sin(x)}{2x-3\sin(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left[3-2\frac{\sin(x)}{x}\right]}{x\left[2-3\frac{\sin(x)}{x}\right]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[3-2\frac{\sin(x)}{x}\right]}{\left[2-3\frac{\sin(x)}{x}\right]}=\frac{3}{2}$ per cui la soluzione accettabile è B.

2)

Riscriviamo la somma in questo modo: $\sum_{k=5}^{n}k=\sum_{k=0}^{n}k-\sum_{k=0}^{4}k=\sum_{k=0}^{n}k-10$. Ora ricordando che $\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ si ha $\sum_{k=5}^{n}k=\sum_{k=0}^{n}k-\sum_{k=0}^{4}k=\sum_{k=0}^{n}k-10=\frac{n(n+1)}{2}-10=\frac{n^2+n-20}{2}$, per cui imponendo $\frac{n^2+n-20}{2}\le 10000 \Leftrightarrow n^2+n-20020\le 0 \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{80081}}{2}\le n\le\frac{-1+\sqrt{80081}}{2}$. Poiché n è un numero naturale e $n=\frac{-1+\sqrt{80081}}{2}\cong 140.993$ allora il primo numero naturale che garantisce $\sum_{k=5}^{n}k\le 10000$ è $n=140$. Infatti $\sum_{k=5}^{140}k=\frac{140*141}{2}-10=9860, \sum_{k=5}^{141}k=\frac{141*142}{2}-10=10001$.

3)

Essendo per ipotesi $F''(a)<0$ e ricordando che $F''(a)=\lim_{x\to a}\frac{F'(x)-F'(a)}{x-a}$ allora, per il teorema della permanenza del segno, esisterà un intorno I di a per cui per ogni $x\in I$ si ha $\frac{F'(x)-F'(a)}{x-a}<0$. Quindi se $x>a\to\frac{F'(x)-F'(a)}{x-a}<0\Rightarrow F'(x)<F'(a)$ ed analogamente se $x<a\to\frac{F'(x)-F'(a)}{x-a}<0\Rightarrow F'(x)>F'(a)$. Queste condizioni sapendo che $F'(a)=0$ si riscrivono: $x>a\Rightarrow F'(x)<0$ e $x<a\Rightarrow F'(x)>0$, ed essendo *F* continua e derivabile in *a*, questa è condizione sufficiente per l'esistenza del massimo relativo in *x*=*a*.

4)

La disequazione da risolvere è $[\ln(x)]^2\ge\ln\left(x^2\right)$ e la sua soluzione coincide con la soluzione del sistema seguente:

$$\begin{cases} x>0 \\ [\ln(x)]^2 \geq \ln(x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ [\ln(x)]^2 \geq 2\ln(x) \end{cases}$$

dal momento che per le proprietà dei logaritmi, essendo $x>0$ vale $\ln(x^2)=2\ln(x)$.

Il sistema allora è:

$$\begin{cases} x>0 \\ [\ln(x)]^2 - 2\ln(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ [\ln(x)][\ln(x)-2] \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ [\ln(x)] \leq 0 \cup [\ln(x)] \geq 2 \end{cases}$$

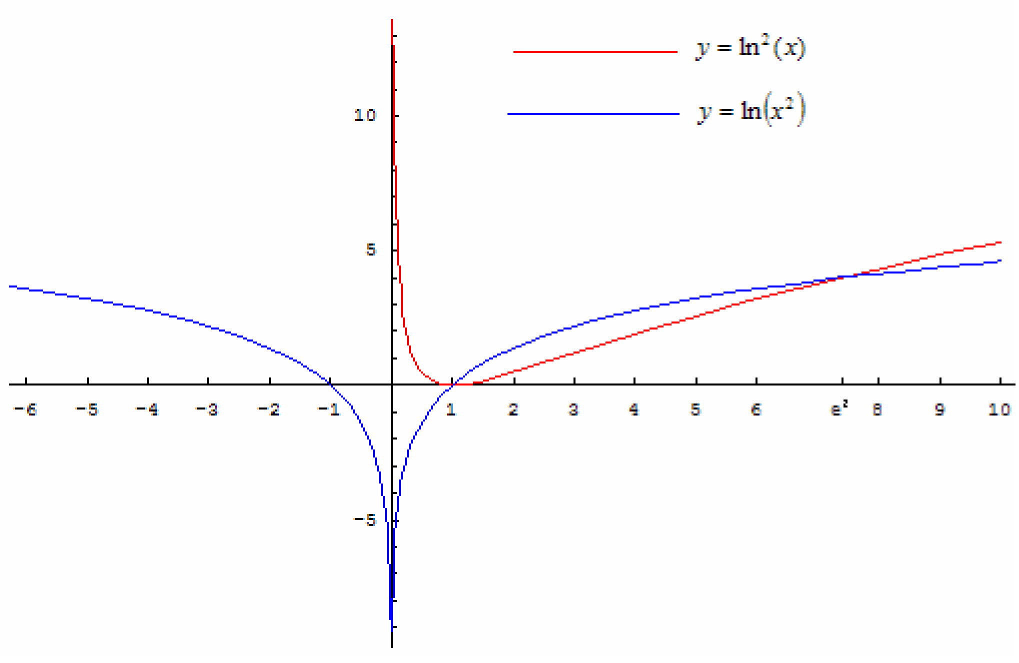
Quest'ultimo sistema è l'unione di due sottosistemi:

$$\begin{cases} x>0 \\ \ln(x) \leq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x>0 \\ \ln(x) \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x>0 \\ x \leq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x>0 \\ x \geq e^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

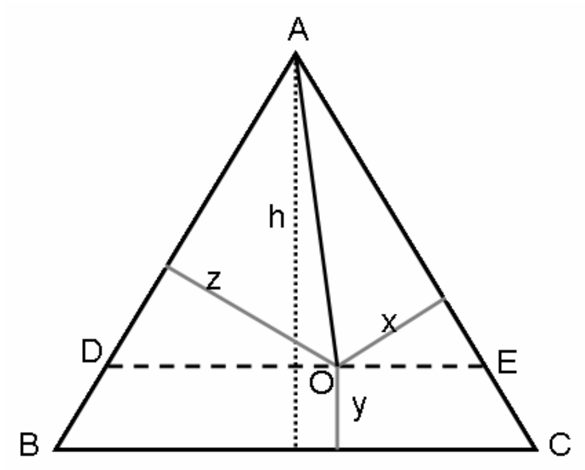
$$0 < x \leq 1 \cup x \geq e^2$$

Quindi in conclusione $[\ln(x)]^2 \geq \ln(x^2) \Leftrightarrow x \in \left]0,1\right] \cup \left[e^2,+\infty\right[$ come rappresentato anche dal grafico sottostante:



5)

Si consideri la figura sottostante:



L'area del triangolo DOA è $A_{DOA} = \frac{1}{2} AD * (z)$; analogamente l'area del triangolo AOE è $A_{AOE} = \frac{1}{2} AE * (x)$. L'area del triangolo ADE è $A_{ADE} = \frac{1}{2} DE * (h-y)$. Il triangolo ADE è simile al triangolo ABC di partenze ed è perciò anch'esso equilatero; per cui $AD = DE = AE = l$.
Ora

$$\begin{aligned} & A_{ADE} = A_{AOE} + A_{DOA} \Rightarrow \\ & \frac{1}{2} DE * (h-y) = \frac{1}{2} AD * (z) + \frac{1}{2} AE * (x) \Leftrightarrow \\ & (h-y) = x + z \Leftrightarrow h = x + y + z \end{aligned}$$

Quindi la risposta corretta è la C.

6)

L'equazione $xy + px + qy + r = 0$ rappresenta una conica ed essa è degenere se il determinante

$$|D| = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{p}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{q}{2} \\ \frac{p}{2} & \frac{q}{2} & r \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(pq - r) = 0 \Leftrightarrow r = pq$$

In tal caso infatti $xy + px + qy + r = 0 \Leftrightarrow xy + px + qy + pq = (x+q)(y+p) = 0 \Leftrightarrow x = -q, y = -p$.

Un altro modo di procedere è scrivere l'equazione iniziale nel modo seguente:

$$xy + px + qy + r = 0 \Leftrightarrow y(q + x) = -(r + px) \Leftrightarrow y = -\frac{(r + px)}{(q + x)}, (x + q) \neq 0$$

che rappresenta una funzione omografica con asintoto verticale in $x = -q$ ed asintoto orizzontale $y = -p$ se e solo se $r \neq pq$.

Se, invece $r = pq$ l'iperbole può essere scritta come

$$y = -\frac{(pq + px)}{(q + x)} \Leftrightarrow y(q + x) + p(q + x) = (y + p)(q + x) = 0 \Leftrightarrow x = -q, y = -p$$

come già precedentemente dimostrato.

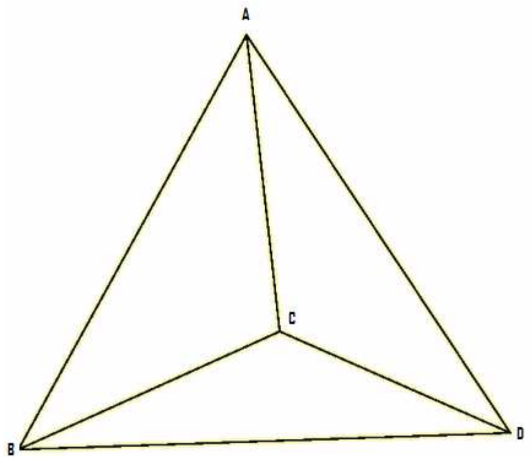
7)

Ricordiamo innanzitutto la definizione di isometria diretta ed inversa:

- le **isometrie dirette**, cioè che conservano *l'orientamento dei punti*;
- le **isometrie inverse o indirette**, che invertono *l'orientamento dei punti* (come la simmetria assiale).

In altri termini l'ordinamento dei punti è un elemento invariante per le isometrie dirette, mentre non lo è per le isometrie inverse. In particolare possiamo dire che le rotazioni, traslazioni e simmetrie centrali sono isometrie dirette nel senso che trasformano figure direttamente uguali, cioè la figura di partenza e quella trasformata si possono sovrapporre attraverso movimenti che le lascino nel piano; invece la simmetria assiale e l'antitraslazione sono tipi di isometrie inverse nel senso che trasformano figure inversamente uguali, cioè la figura di partenza e quella trasformata coincidono e si sovrappongono perfettamente attraverso movimenti non contenuti nel piano.

Consideriamo allora, dopo questa premessa, il tetraedro regolare sotto mostrato, cioè un poliedro regolare con le facce corrispondenti a triangoli equilateri:



I vertici del tetraedro sono 4 ed essendo equidistanti ogni loro permutazione comporterà una isometria del tetraedro in sé; quindi le permutazioni e le isometrie possibili del tetraedro in sé saranno $4! = 1 * 2 * 3 * 4 = 24$.

Ora se effettuiamo una isometria diretta, ed a valle scambiamo due vertici trasformati, otteniamo una isometria indiretta, per cui ad una isometria diretta corrisponde sempre una indiretta, ed essendo la somma 24 si conclude che le isometrie dirette sono 12. Tra questa c'è la trasformazione identica che trasforma un punto del piano in sé, per cui dobbiamo capire come ricavare le altre 11 isometrie dirette, facendo appello alle rotazioni, traslazioni e simmetrie centrali (rotazioni di 180°).

I 4 assi di rotazione congiungenti 1 vertice con il centro della faccia opposta danno origine a 2 rotazioni, 1 di 120° ed 1 di 240° , per cui le isometrie dirette sono 8; inoltre ci sono 3 assi di simmetria che sono le rette congiungenti i punti medi di due spigoli opposti per cui attraverso una simmetria centrale e cioè ad una rotazione di 180° ritroviamo il tetraedro di partenza con l'orientamento dei punti conservato. In conclusione le 12 isometrie dirette sono:

1. 4 rotazioni di 120°;
2. 4 rotazioni di 240°;
3. 3 rotazioni di 180°;
4. Trasformazione o isometria identica.

8)

Sostituendo i punti (1,0) ed (1,-1) nell'equazione dell'affinità si ha:

$$\begin{cases} 1 = a \\ -1 = \frac{b}{2} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Quindi l'affinità diventa:

$$\begin{cases} X = x + 2y \\ Y = x - 2 \end{cases}$$

La trasformazione inversa sarà allora

$$\begin{cases} x = Y + 2 \\ y = \frac{X - Y - 2}{2} \end{cases}$$

Una retta è una retta unita dell'affinità se esistono m, q per cui la retta $y = mx + q$ è trasformata nella retta $Y = mX + q$.

La retta $y = mx + q$ è trasformata in : $\frac{X - Y - 2}{2} = m(Y + 2) + q \Leftrightarrow Y = \frac{1}{2m+1} X - \frac{2q}{2m+1} - 2$ per cui le rette unite dell'affinità dovranno soddisfare le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2m+1} = m \\ \dfrac{2q}{2m+1} - 2 = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 + m - 1 = 0 \\ q = -\dfrac{4m+2}{2m+3} \end{cases}$$

Dalla prima ricaviamo $2m^2 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{-1 \pm 3}{4}$, cioè ricaviamo $m_1 = -1 \rightarrow q_1 = 2$ e $m_2 = \dfrac{1}{2} \rightarrow q_2 = -1$ per cui le rette unite sono $y = -x + 2, y = \dfrac{x}{2} - 1$.

9)

Un gioco è equo quando la probabilità di vincita è direttamente proporzionale alla posta giocata. Nel caso in esame, poiché i due giocatori puntano la stessa somma, allora deve verificarsi la stessa probabilità di vittoria.

Ora A può vincere o al primo turno od al terzo se al secondo B non vince; B invece può vincere al secondo se A non vince al primo oppure al quarto se A non vince al terzo; questo in termini probabilistici significa che

$$p(A) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{8}$$
$$p(B) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$$

Quindi $P(A) = 2P(B)$ per cui il gioco non è equo; lo sarebbe stato se la puntata di A fosse stata il doppio di quella di B.

10)

La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x - \cos(x)}$ è positiva se $x > \cos(x)$. Ora in $\left[1, \dfrac{\pi}{2}\right]$ la funzione $\cos(x)$ è decrescente positiva con valore massimo raggiunto pari a $\cos(1) < \cos(0) = 1$ mentre in $\left[\dfrac{\pi}{2}, 2\right]$ la funzione è decrescente negativa, per cui $\forall x \in [1,2]$ si ha $x > \cos(x)$.

L'integrale $I = \int_1^2 \dfrac{1}{x - \cos(x)} dx$ lo si può calcolare, ad esempio, attraverso l'approssimazione per rettangoli che si traduce in:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}\left[f(x_0) + f(x_2) + \cdots f(x_{n-1})\right]$$

Nel nostro caso utilizzeremo n=8 rettangoli con intervalli equispaziati di $\dfrac{1}{8}$ per cui

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x-\cos(x)}dx \cong \frac{1}{8}\sum_{i=0}^{7}\left[\frac{1}{\left(\frac{i}{8}+1\right)-\cos\left(\frac{i}{8}+1\right)}\right].$$

Ora attraverso un calcolatore possiamo calcolare questa somma di 8 termini e ricavare

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x-\cos(x)}dx \cong \frac{1}{8}\sum_{i=0}^{7}\left[\frac{1}{\left(\frac{i}{8}+1\right)-\cos\left(\frac{i}{8}+1\right)}\right] \cong 0.976$$

Ovviamente il valore di tale integrale calcolato attraverso l'approssimazione per rettangoli sarà più preciso quanto più piccola sarà la base dei rettangoli considerati, quindi quanto più piccola sarà la spaziatura dei rettangoli. Il grafico sottostante evidenzia quanto detto: