

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
a.s. 2003/2004
CORSO SPERIMENTALE P.N.I.
Tema di MATEMATICA

Seconda prova scritta
 Sessione straordinaria

Il candidato risolve uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

In un piano è assegnata la parabola p di vertice V e fuoco F tali che, rispetto ad una assegnata unità di lunghezza, il segmento VF sia lungo $\frac{1}{2}$. Indicato con E il punto simmetrico di F rispetto a V e riferito il piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy):

- a) Determinare l'equazione della parabola p e stabilire se esiste un punto A di p tale che il triangolo AEF sia rettangolo in A .
- b) Chiamato P un generico punto della parabola p , trovare le coordinate del baricentro G del triangolo PEF e determinare l'equazione del luogo geometrico k descritto dal punto G al variare di P su p .
- c) Indicati con R ed S due punti appartenenti il primo alla parabola p ed il secondo al luogo k e situati nel 1° quadrante su una retta r perpendicolare all'asse di simmetria della parabola p , calcolare a quale distanza da V bisogna condurre la retta r affinché l'area della regione finita di piano delimitata dal segmento RS , dall'arco VR della parabola p e dall'arco VS del luogo k sia uguale a $\frac{8}{9}(3 - \sqrt{3})$.
- d) Stabilire se la distanza trovata sopra è espressa da un numero razionale o irrazionale.

Soluzione

a)

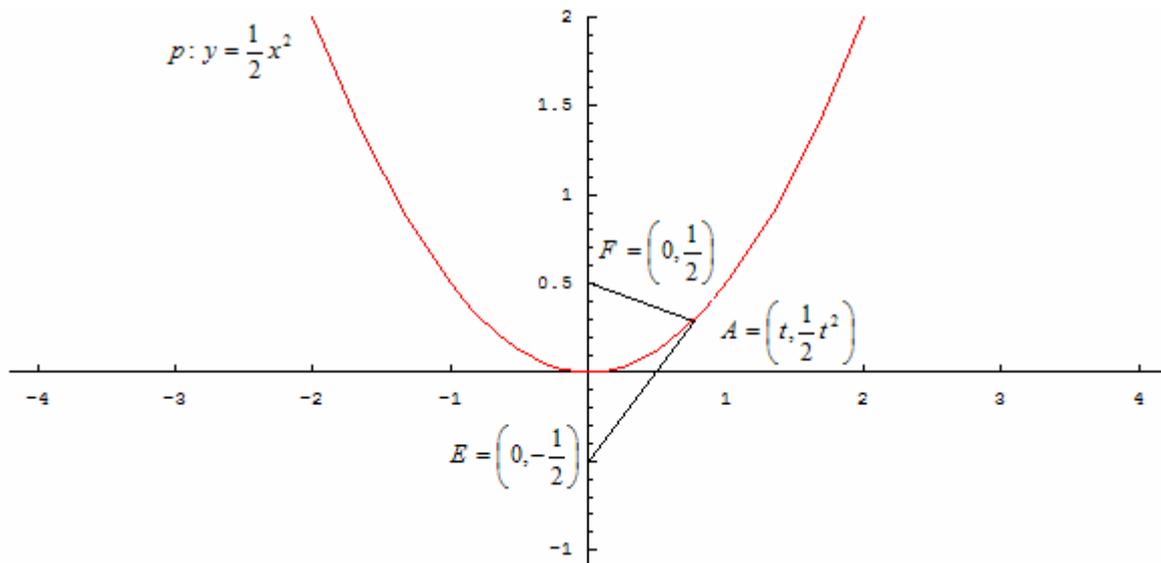
Il sistema di riferimento più conveniente è quello con origine in $(0,0)$, fuoco della parabola in $F = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ e vertice della parabola in $V = (0,0)$. Questo comporta che $E = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$ e garantisce

che il segmento VF abbia lunghezza $\frac{1}{2}$. La parabola con vertice $V = (0,0)$ ha equazione generica

$y = ax^2$ ed imponendo che l'ordinata del fuoco sia $\frac{1}{2}$, si ha

$$\frac{1-\Delta}{4a} = \frac{1+4ac-b^2}{4a} = \frac{1}{4a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ per cui la parabola ha equazione } p: y = \frac{1}{2}x^2.$$

Il punto generico P della parabola ha coordinate $A = \left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$. Consideriamo la figura sottostante:



Ora ci sono differenti modi di procedere.

Un modo è calcolare le FA e AE ed imporre che il prodotto dei coefficienti angolari sia pari a (-1).

Seguiamo questa strada:

$$FA: \frac{y - \frac{t^2}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{t^2}{2}} = \frac{x - t}{-t} = 1 - \frac{x}{t} \Rightarrow y = \frac{1}{2} - \frac{1 - t^2}{2t}x$$

$$AE: \frac{y - \frac{t^2}{2}}{-\frac{1}{2} - \frac{t^2}{2}} = \frac{x - t}{-t} = 1 - \frac{x}{t} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} + \frac{1 + t^2}{2t}x$$

Ora imponendo $m_{PF}m_{PE} = -1$ si ha $-\left(\frac{1-t^4}{4t^2}\right) = -1 \Rightarrow \left(\frac{1-t^4}{4t^2}\right) = 1$ per cui supponendo $t \neq 0$

l'equazione da risolvere diventa $t^4 + 4t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t^2 = -2 \pm \sqrt{5} \Rightarrow t = \pm\sqrt{-2 \pm \sqrt{5}}$. Ovviamente

essendo $\sqrt{5} > 2$ le soluzioni del tipo $t = \pm\sqrt{-2 - \sqrt{5}}$ vanno scartate per cui quelle da considerare

sono $t = \pm\sqrt{-2 + \sqrt{5}}$ da cui i punti che rendono il triangolo AEF rettangolo sono

$$A_1 = \left(\sqrt{-2 + \sqrt{5}}, \frac{-2 + \sqrt{5}}{2}\right), A_2 = \left(-\sqrt{-2 + \sqrt{5}}, \frac{-2 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

Un altro modo di procedere è il seguente: dovendo essere rettangolo, allora il triangolo AEF è inscritto in una semicirconferenza con ipotenusa pari al diametro. Questo significa che VA e VF

sono i raggi della semicirconferenza per cui dovranno essere uguali e cioè imponendo che

$$VA^2 = VF^2 \Rightarrow \frac{t^4}{4} + t^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow t^4 + 4t^2 - 1 = 0 \text{ che è la stessa equazione già ricavata e risolta.}$$

b)

Il baricentro G di un triangolo generico ha ascissa pari che sono pari ad $\frac{1}{3}$ della somma delle

ascisse dei vertici del triangolo e ordinata pari a $\frac{1}{3}$ della somma delle ordinate dei vertici del

triangolo; nel nostro caso $G = \left(\frac{x_A + x_E + x_F}{3}, \frac{y_A + y_E + y_F}{3} \right)$, quindi:

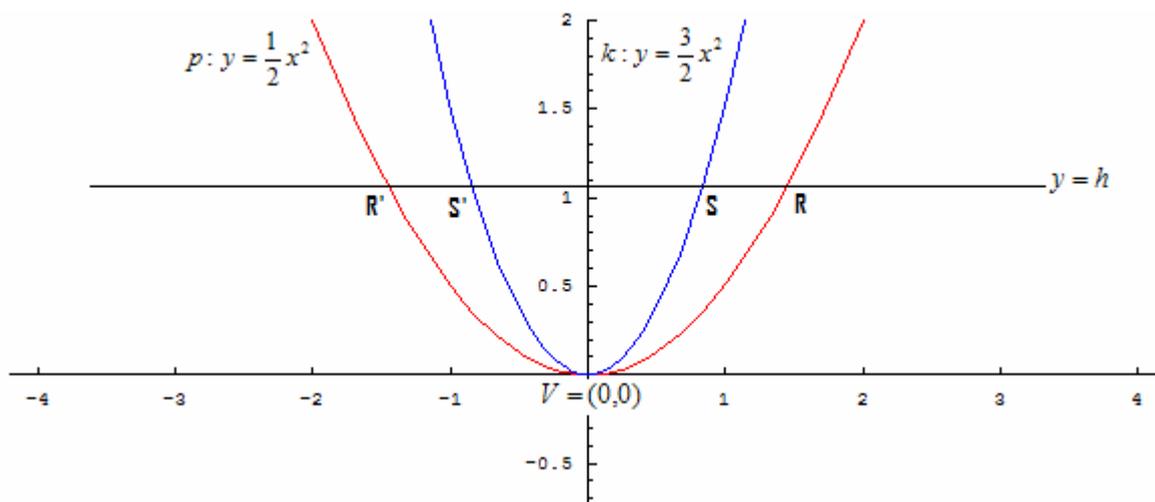
$$G : \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_E + x_F}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_E + y_F}{3} \end{cases} \Rightarrow G : \begin{cases} x_G = \frac{t}{3} \\ y_G = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow G : \begin{cases} x_G = \frac{t}{3} \\ y_G = \frac{t^2}{6} = \frac{3}{2} \left(\frac{t}{3} \right)^2 \end{cases}$$

Quindi il luogo geometrico descritto dal baricentro del triangolo AEF, non considerando il pedice

G, è $k : y = \frac{3}{2}x^2$ cioè una parabola anch'essa con vertice in $V = (0,0)$.

c)

Consideriamo la figura sottostante:



Consideriamo la retta $y = h, h > 0$ perpendicolare all'asse di simmetria delle due parabole, asse coincidente con l'asse delle ordinate. Poiché i punti R ed S si trovano nel primo quadrante essi avranno ascissa positiva, per cui le coordinate dei due punti sono:

$$S = (\sqrt{2h}, h)$$

$$R = \left(\sqrt{\frac{2h}{3}}, h \right)$$

Ora, vista la simmetria in gioco, l'area della regione VSR la si può calcolare come semidifferenza tra l'area della regione VRR' e VSS', cioè $A_{VSR} = \frac{1}{2}(A_{VRR'} - A_{VSS'})$. Ora le due aree $A_{VRR'}$, $A_{VSS'}$ le calcoliamo applicando il principio di Archimede, per cui l'area del segmento parabolico è $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo circoscritto. In tal modo

$$A_{VRR'} = \frac{2}{3}(2h\sqrt{2h})$$

$$A_{VSS'} = \frac{2}{3}\left(2h\sqrt{\frac{2h}{3}}\right)$$

per cui

$$A_{VSR} = \frac{1}{2}(A_{VRR'} - A_{VSS'}) = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \left(2h\sqrt{2h} - 2h\sqrt{\frac{2h}{3}} \right) =$$

$$= \frac{2}{3} \left(h^{\frac{3}{2}} 2^{\frac{1}{2}} - h^{\frac{3}{2}} 2^{\frac{1}{2}} 3^{-\frac{1}{2}} \right) = \frac{h^{\frac{3}{2}} 2^{\frac{3}{2}}}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{h^{\frac{3}{2}} 2^{\frac{3}{2}}}{3^2} (3 - \sqrt{3})$$

$$\text{Ora } A_{VSR} = \frac{h^{\frac{3}{2}} 2^{\frac{3}{2}}}{3^2} (3 - \sqrt{3}) = \frac{8}{9} (3 - \sqrt{3}) \Leftrightarrow h^{\frac{3}{2}} 2^{\frac{3}{2}} = 2^3 \Leftrightarrow h^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow h = 2$$

d)

La distanza $h = 2$ è ovviamente un numero razionale.

PROBLEMA 2.

In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{1 + a \sin(x)}{\cos(x)}$$

dove a è un parametro reale.

a) Dimostrare che si tratta di curve periodiche con periodo 2π , che hanno in comune infiniti punti dei quali si chiedono le coordinate.

b) Tra le curve assegnate determinare quelle che hanno come tangente orizzontale la retta di equazione

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

c) Controllato che due curve soddisfano alla condizione precedente, dimostrare che sono l'una simmetrica dell'altra rispetto all'asse y e disegnarle nell'intervallo $-\pi \leq x \leq \pi$, dopo aver spiegato, in particolare, perché nessuna di esse presenta punti di flesso.

Soluzione

a)

La funzione $y = \frac{1 + a \sin(x)}{\cos(x)}$ la possiamo riscrivere come $y = \frac{1}{\cos(x)} + a \tan(x)$. La funzione

$\cos(x)$ è periodica di 2π per cui anche la funzione $\frac{1}{\cos(x)}$ sarà periodica di 2π , mentre la

funzione $\tan(x)$ è periodico di π , per cui il periodo della funzione $y = \frac{1 + a \sin(x)}{\cos(x)}$ è il minimo

comune multiplo tra i periodi delle funzioni componenti, per cui $T = m.c.m(2\pi, \pi) = 2\pi$.

Indichiamo con $y_{a'} = \frac{1 + a' \sin(x)}{\cos(x)}$, $y_{a''} = \frac{1 + a'' \sin(x)}{\cos(x)}$ due curve della famiglia al variare del

parametro a .

Ora

$$y_{a'} = \frac{1}{\cos(x)} + a' \tan(x) = \frac{1}{\cos(x)} + a'' \tan(x) = y_{a''} \Leftrightarrow$$

$$a' \tan(x) = a'' \tan(x) \Leftrightarrow (a' - a'') \tan(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tan(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$$

Per cui i punti in comune tra le funzioni della famiglia sono infiniti e del tipo $((2k + 1)\pi, -1), (2k\pi, 1)$.

b)

I punti che hanno tangente orizzontale sono i punti stazionari, cioè i punti in cui si annulla la derivata prima perché l'annullamento della derivata prima comporta che i punti in gioco o sono dei minimi relativi o dei massimi relativi o dei flessi a tangente orizzontale; per cui l'annullamento della derivata prima è condizione sufficiente perché la funzione abbia tangente o tangenti

orizzontali. Calcoliamo allora la derivata prima:

$$f'_a(x) = \frac{a \cos(x) \cos(x) - (1 + a \sin(x))(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{a + \sin(x)}{\cos^2(x)}$$

Supponendo $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ la derivata prima si annulla se e solo se $a + \sin(x) = 0, |a| < 1$. Quindi le

ascisse dei punti in cui si annulla la derivata prima si ricavano dall'equazione $\sin(x) = -a, |a| < 1$ in

corrispondenza dei quali le rispettive ordinate saranno $y = \frac{1 - a^2}{\pm \sqrt{1 - a^2}} = \pm \sqrt{1 - a^2}$. Ora imponendo

$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ si ha $\sqrt{1 - a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 1 - a^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$ per cui le due curve della famiglia che hanno

tangente orizzontale pari a $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sono

$$y_{a=\frac{1}{2}} = \frac{1 + \frac{1}{2} \sin(x)}{\cos(x)} = \frac{2 + \sin(x)}{2 \cos(x)}$$

$$y_{a=-\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2} \sin(x)}{\cos(x)} = \frac{2 - \sin(x)}{2 \cos(x)}$$

Applichiamo alla prima curva di equazione $y_{a=\frac{1}{2}} = \frac{2 + \sin(x)}{2 \cos(x)}$ la trasformazione

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

si ha :

$$y'_{a=\frac{1}{2}} = \frac{2 + \sin(x')}{2 \cos(x')} = \frac{2 + \sin(-x)}{2 \cos(-x)} = \frac{2 - \sin(x)}{2 \cos(x)} = y_{a=-\frac{1}{2}}$$

cioè le due curve sono simmetriche rispetto alla trasformazione $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$, simmetriche cioè rispetto all'asse delle ordinate.

c)

Studiamo la funzione $y_{a=\frac{1}{2}} = \frac{2 + \sin(x)}{2 \cos(x)}$ in $[-\pi, \pi]$ e poi tracciamo il grafico dell'altra funzione

$$y_{a=-\frac{1}{2}} = \frac{2 - \sin(x)}{2 \cos(x)} \text{ ricordando la simmetria tra le due sopra evidenziata.}$$

✚ Dominio: $2 \cos(x) \neq 0 \Rightarrow x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2} \right[\cup \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$;

✚ Intersezione asse delle ascisse: non esistono visto che $\sin(x) + 2 > 0 \forall x \in R$;

✚ Intersezione asse delle ordinate: $x = 0 \rightarrow y = 1$;

✚ Eventuali simmetrie: la funzione non presenta simmetrie, non è né pari né dispari;

✚ Valori assunti agli estremi: $y_{a=\frac{1}{2}}(\pm \pi) = -1$;

✚ Positività: $y_{a=\frac{1}{2}} = \frac{2 + \sin(x)}{2 \cos(x)} > 0 \Leftrightarrow \cos(x) > 0 \Rightarrow x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$;

✚ Asintoti verticali:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2 + \sin(x)}{2 \cos(x)} = \frac{3}{0^-} = -\infty, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2 + \sin(x)}{2 \cos(x)} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \frac{2 + \sin(x)}{2 \cos(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} \frac{2 + \sin(x)}{2 \cos(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Quindi le rette $x = \pm \frac{\pi}{2}$ sono due asintoti verticali;

✚ Asintoti orizzontali ed obliqui: non ce ne sono;

✚ Crescenza e decrescenza:

La derivata prima è:

$$y'_{a=\frac{1}{2}} = \frac{2 \sin(x) + 1}{2 \cos^2(x)} > 0 \Leftrightarrow 2 \sin(x) + 1 > 0, \cos(x) \neq 0 \Rightarrow x \in \left] -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2} \right[\cup \left] -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6} \right[$$

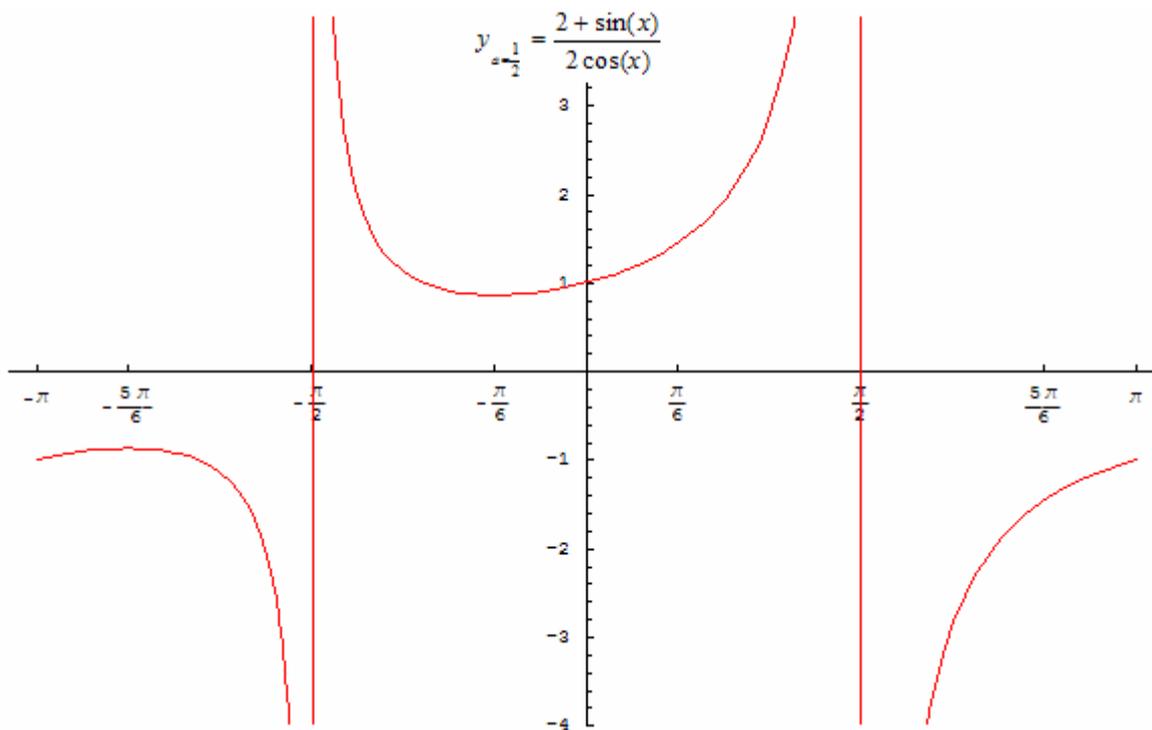
La derivata seconda è: $y''_{a=\frac{1}{2}} = \frac{\sin^2(x) + \sin(x) + 1}{\cos^3(x)}$. Tale derivata non si annulla mai per cui la

funzione $y_{a=\frac{1}{2}} = \frac{2 + \sin(x)}{2 \cos(x)}$ non ha flessi. Inoltre

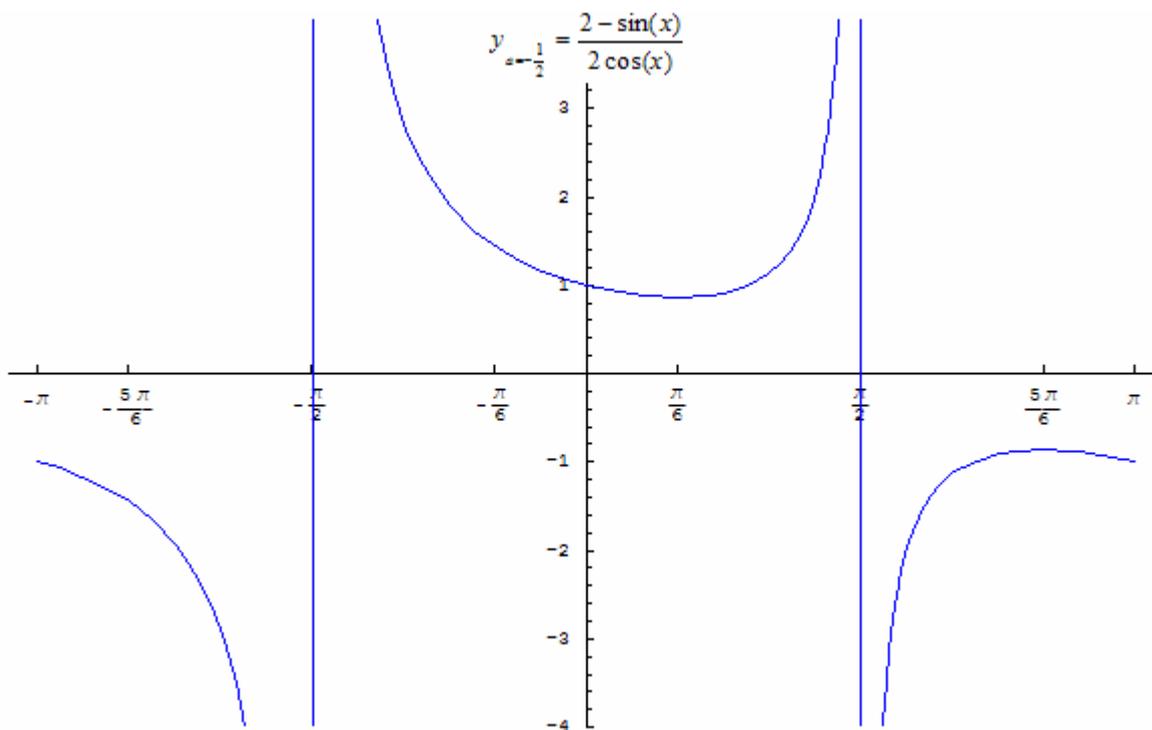
$$y''_{a=\frac{1}{2}} \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \left[\frac{\sin^2(x) + \sin(x) + 1}{\cos^3(x)} \right]_{x=-\frac{\pi}{6}} > 0, y''_{a=\frac{1}{2}} \left(-\frac{5\pi}{6} \right) = \left[\frac{\sin^2(x) + \sin(x) + 1}{\cos^3(x)} \right]_{x=-\frac{5\pi}{6}} < 0 \text{ per}$$

cui il punto $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ è un minimo relativo mentre $\left(-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ è di massimo relativo.

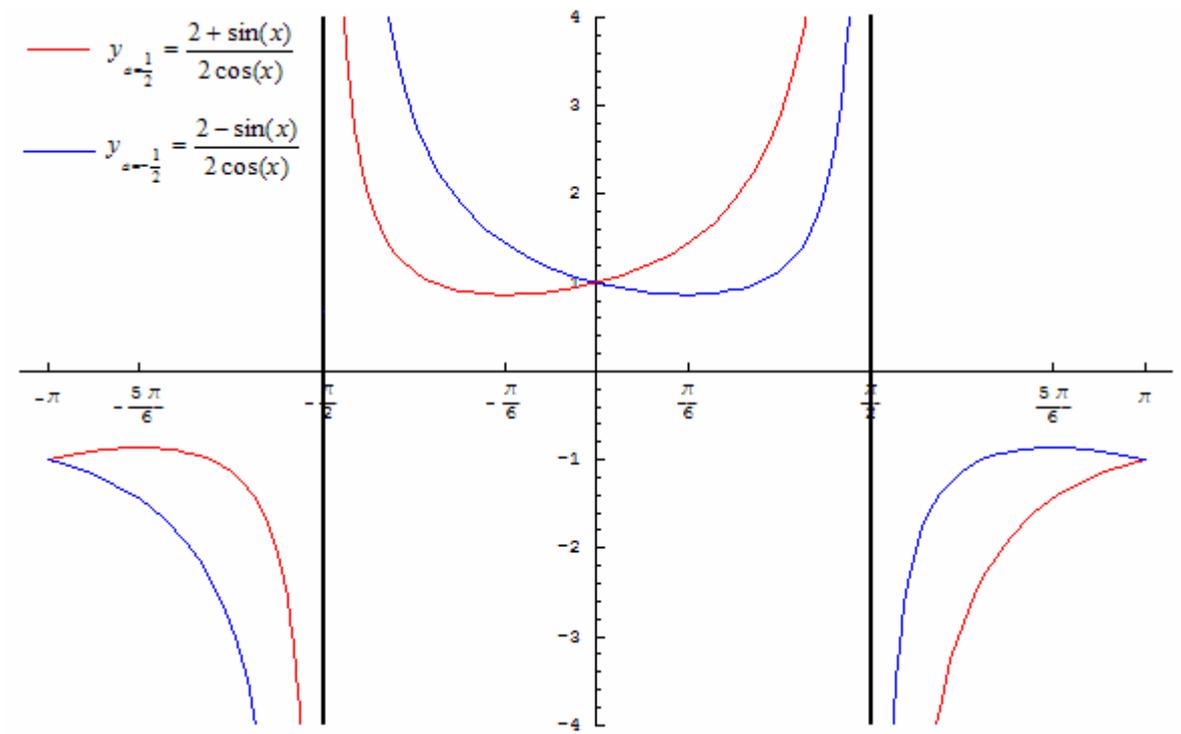
Il grafico è sotto presentato:



Il grafico di $y_{a=-\frac{1}{2}} = \frac{2 - \sin(x)}{2 \cos(x)}$ ricordando la simmetria è:



Mettiamo su uno stesso sistema di riferimento i due grafici ed otteniamo:



QUESTIONARIO

1) Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce consecutive di un ottaedro regolare, espressa in gradi sessagesimali e approssimata al secondo.

2) Dimostrare che, se due piani sono perpendicolari, ogni retta perpendicolare a uno di essi è parallela all'altro o è contenuta in esso.

Si può concludere che ogni retta parallela a uno dei due piani è perpendicolare all'altro? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

3) Determinare il dominio della funzione $f(x) = \ln(1 - 2x + \sqrt{x})$.

4) Il limite di $\operatorname{tg}x$ per x tendente a $+\infty$:

A) è $+\infty$;

B) è $\frac{\pi}{2}$;

C) non esiste;

D) esiste ma non si riesce a calcolare

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

5) Dimostrare il seguente teorema: «Condizione sufficiente ma non necessaria affinché la funzione reale di variabile reale $f(x)$ sia continua nel punto a è che sia derivabile in a ».

6) Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare la formula che fornisce il volume di una sfera di raggio assegnato.

7) Indicata con S_n la somma di n termini in progressione geometrica, di primo termine $\frac{1}{2}$ e ragione $\frac{1}{2}$, calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}.$$

8) Calcolare il valore della seguente somma: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2$.

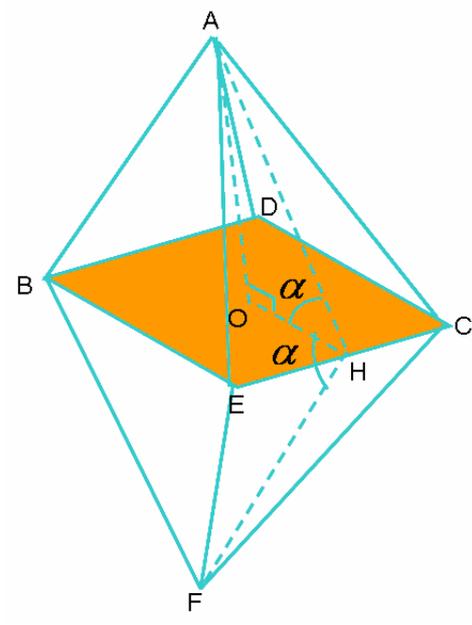
9) In una classe di 25 alunni bisogna estrarre a sorte una rappresentanza di 3 elementi. Calcolare quante sono le possibili terne di rappresentanti.

10) Alla finale dei 200 m piani partecipano 8 atleti, fra i quali figurano i nostri amici Antonio e Pietro. Calcolare il numero dei possibili ordini di arrivo che registrino i nostri due amici fra i primi tre classificati.

Soluzione

1)

Si consideri l'ottaedro sotto rappresentato. Esso è costituito da un quadrato di base di lato l e da facce che sono triangoli equilateri. Sia AO la retta perpendicolare condotta da A al quadrato di base $BEDC$.



Per costruzione e simmetria $OH = \frac{l}{2}$, mentre AH , essendo l'altezza del triangolo equilatero AEC di

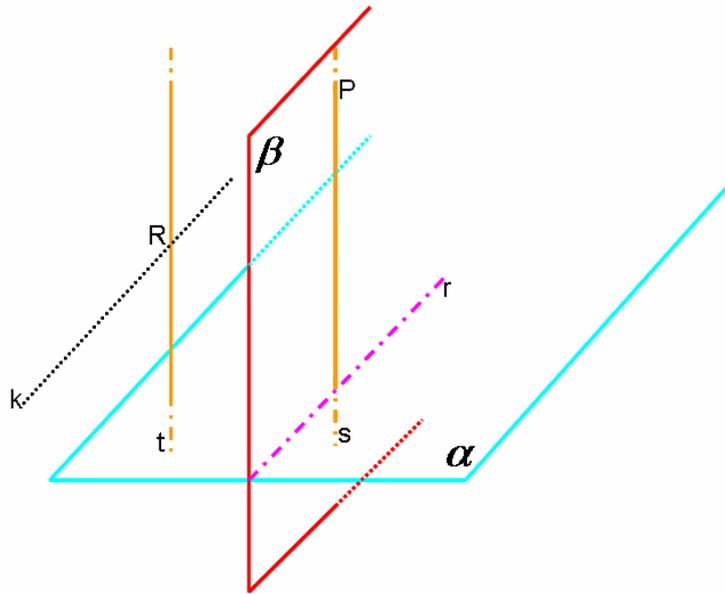
lato l sarà $AH = \frac{l\sqrt{3}}{2}$. Ora il triangolo AOH è rettangolo per cui

$OH = AH \cos(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{OH}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ da cui, essendo $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = -\frac{1}{3}$ si ha

$$2\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \cong 109^\circ 28' 16''.$$

2)

La figura seguente rappresenta la questione geometrica del quesito:



L'intersezione tra i due piani α, β è la retta r . Prendiamo un punto P appartenente a β e da esso conduciamo la retta s perpendicolare ad α . La retta s apparterrà ovviamente al piano β perché in caso contrario conducendo da P la perpendicolare alla retta r essa sarebbe perpendicolare pure al piano α , per cui da uno stesso punto P sarebbe possibile condurre due perpendicolari allo stesso piano, cosa questa assurda. Per cui s non può non appartenere al piano β .

Analogamente condotta da un punto R non appartenente al piano β una retta t perpendicolare al piano α , tale retta t sarà parallela alla retta s dal momento che entrambe perpendicolare ad uno stesso piano; in tal caso allora la retta t sarà parallela al piano β . Quindi è stato provato che, se due piani sono perpendicolari, ogni retta perpendicolare a uno di essi è parallela all'altro o è contenuta in esso.

Se, invece prendiamo una retta parallela ad uno dei due piani, non è detto che essa sia perpendicolare all'altro: infatti la retta k , passante per R e parallela alla retta r risulta essere parallela ad entrambi i piani.

3)

Il dominio della funzione $f(x) = \ln(1 - 2x + \sqrt{x})$ è $\begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - 2x + \sqrt{x} > 0 \end{cases}$.

Risolviamo la disequazione irrazionale $1 - 2x + \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 2x - 1$. Le soluzioni di tale disequazione sono l'unione delle soluzioni dei due sistemi seguenti:

$$\begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x > (2x - 1)^2 \end{cases}$$

Risolvendoli si ha:

$$\begin{cases} 2x-1 < 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

mentre

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x > (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 5x + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1$$

Quindi $1 - 2x + \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2} \cup \frac{1}{2} \leq x < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$.

Per cui il dominio sarà:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$$

4)

Per calcolare il limite suddetto basta ricordare la teoria delle successioni. Infatti se per ogni successione x_n tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$ allora si deduce che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

Prendiamo a tal proposito due successioni $x_{1,n} = \alpha + \pi n, x_{2,n} = -\alpha + \pi n$ con $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ si ha

ovviamente $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{(1,2)n} = +\infty$, ma $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tan(\alpha + \pi n) = \tan(\alpha)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tan(-\alpha + \pi n) = \tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$

per cui essendo i due limiti differenti si deduce la non esistenza del limite richiesto, per cui la risposta corretta è la C.

5)

Una funzione è derivabile in $x = a$ se esiste finito il limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$. Ora si

consideri la seguente identità $f(a+h) = f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h} * h$; passando al limite si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h} * h \right] = \\ &= f(a) + \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right] \lim_{h \rightarrow 0} h = f(a) + f'(a) * 0 = f(a) \end{aligned}$$

Quindi $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$; ora se effettuiamo la sostituzione $a+h = x$ si ha:

$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ e cioè dalla derivabilità in $x = a$ è stata dimostrata la continuità in $x = a$.

Ovviamente se una funzione è continua in $x = a$ non è detto che essa sia derivabile in $x = a$; come controesempi si possono prendere alcune funzioni, come $f(x) = |x|, g(x) = \sqrt[3]{x^2}$ che sono continue in $x = 0$ dal momento che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0$, ma in $x = 0$ le

derivate non esistono. Infatti $f'(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}, g'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ per cui

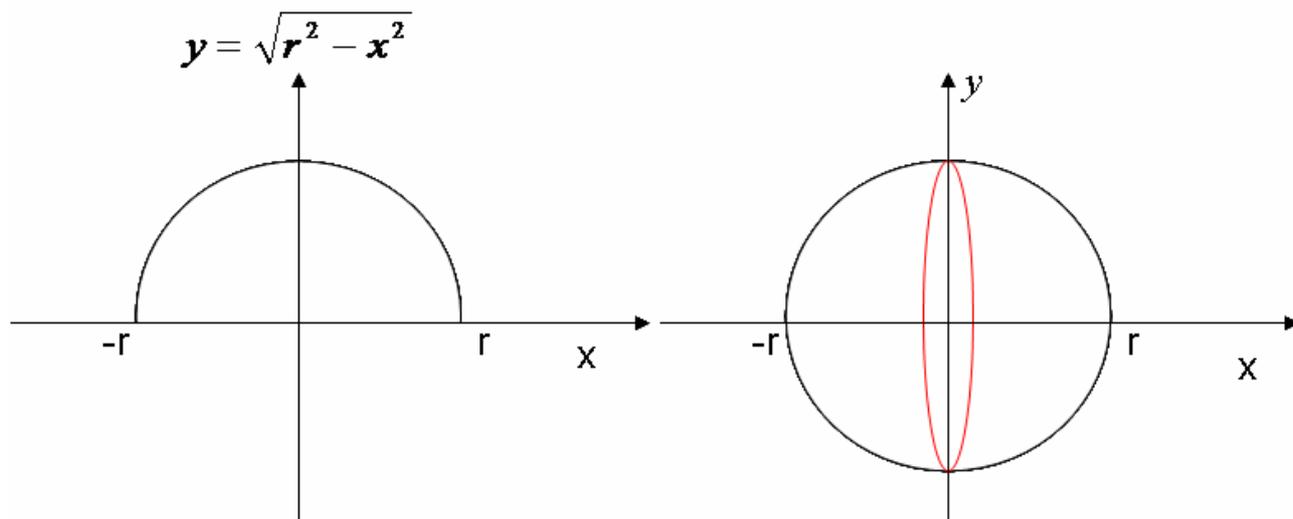
$$1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1, +\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = -\infty$$

In conclusione la derivabilità in $x = a$ è condizione sufficiente per la continuità in $x = a$ e non necessaria.

6)

La sfera può essere pensata come il solido ottenuto dalla rotazione di un semicerchio intorno al suo diametro come rappresentato nella figura sottostante. Considerato un sistema di riferimento OXY, un semicerchio di diametro $2r$, centro coincidente con l'origine (0,0) del sistema di riferimento e posizionato nei quadranti ad ordinata positiva, ha equazione $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, equazione che scaturisce dall'equazione della circonferenza $x^2 + y^2 = r^2$ che per $y \geq 0$ può essere espressa come $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Ora ricordando il teorema di Guldino per i solidi di rotazione si ha:

$$V_{sfera} = \pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right] = \frac{4\pi r^3}{3}$$



7)

Per come richiesto si ha innanzitutto:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Ora dobbiamo calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$. Poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ si ha di conseguenza

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} = 0.$$

8)

La somma richiesta può essere espressa nel modo seguente: $S_{100} = \sum_{k=0}^{100} k^2$.

Ora ricordiamo che per induzione si può dimostrare che $S_n = \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$; infatti

$S_1 = 1 = \frac{1}{6}1 \cdot (2) \cdot (3)$, per cui posto che è vera $S_n = \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, dobbiamo far vedere

che $S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$. A tal proposito scriviamo i primi termini della

successione, si ha:

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= S_1 + 2^2 \\ S_3 &= S_2 + 3^2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ S_{n+1} &= S_n + (n+1)^2 \end{aligned}$$

Per cui

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \\ &= \frac{1}{6}(n+1)[2n^2 + n + 6n + 6] = \frac{1}{6}(n+1)[2n^2 + 3 + 4n + 6] = \\ &= \frac{1}{6}(n+1)[n(2n+3) + 2(2n+3)] = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \quad \text{c.v.d} \end{aligned}$$

Per cui

$$S_{100} = \sum_{k=0}^{100} k^2 = \frac{1}{6}(100)(101)(201) = 338350.$$

9)

Ricordando il calcolo combinatorio le possibili combinazioni sono:

$$C_{25,3} = \binom{25}{3} = \frac{23 * 24 * 25}{6} = 23 * 4 * 25 = 23 * 100 = 2300$$

10)

Il numero di combinazioni possibili delle posizioni dei primi tre classificati è ovviamente $3! = 1 * 2 * 3 = 6$; ora Antonio e Pietro si trovano tra i primi tre, per cui il terzo atleta può essere uno dei sei atleti ($8 - 2 = 6$) rimanenti, per cui il numero di combinazioni che vedono Antonio e Pietro tra i primi tre classificati sono $N = 6 * (3!) = 6 * 6 = 36$.