

MINISTERO DELL'ISTRUZIONE, DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA**SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO****ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO***Sessione Ordinaria a.s. 2004/2005***SECONDA PROVA SCRITTA****Tema di Matematica***Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario.***PROBLEMA 1**

La funzione f è definita da $f(x) = x^3 - 6x^2 + k$ dove k è una costante arbitraria.

1. Si trovino, in funzione di k , i valori di minimo e massimo relativo di f .
2. Per quali valori di k , f ha tre zeri reali distinti?
3. Si trovi il valore di k tale che il valor medio di f nell'intervallo chiuso $[-1, 2]$ sia 1.
4. Si determini l'area della regione finita delimitata dal grafico di f e dall'asse x quando $k=32$.

PROBLEMA 2

Siano date la parabola λ e la retta r d'equazioni rispettive $y = x^2 + 1$ e $y = x - 1$

1. Quale è la distanza minima tra λ e r ? E quale ne è il valore?
2. Siano A e B i punti d'intersezione di λ con la retta s d'equazione $y = x + 3$, si determini il punto P appartenente all'arco AB tale che il triangolo ABP abbia area massima
3. Si determini l'area del segmento parabolico di base AB e si verifichi che essa è $\frac{4}{3}$ dell'area del triangolo ABP.
4. Si determini il volume del solido generato dalla rotazione completa del segmento parabolico di base AB attorno all'asse x .

QUESTIONARIO

1. Indicata con S_n la somma di n termini in progressione geometrica di primo termine $\frac{1}{2}$ e ragione $\frac{1}{2}$ si calcoli il $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$.
2. Una piramide ha la base quadrata e l'altezza uguale a 8cm . Quanti piani paralleli alla base dividono la piramide in due parti i cui volumi sono nel rapporto $7:1$? Quali sono le distanze di tali piani dal vertice della piramide?
3. Un recipiente contiene 1000 litri di liquido. Se è un parallelepipedo a base quadrata, quali ne sono le dimensioni minime?
4. Quale è il cilindro di volume massimo inscrivibile in una sfera assegnata?
5. Quando una funzione f è invertibile? Come si calcola la derivata della funzione inversa f^{-1} ? Fai un esempio.
6. Spiegare come utilizzare il teorema di Carnot per trovare la distanza tra due punti accessibili ma separati da un ostacolo.
7. Trovare il periodo della funzione : $y = \sin\left(\frac{2}{3}x\right) + \sin\left(\frac{1}{4}x\right)$
8. Dimostrate che la somma di qualsiasi numero reale positivo e del suo reciproco è almeno 2

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

La funzione f è definita da $f(x) = x^3 - 6x^2 + k$ dove k è una costante arbitraria.

Punto 1

Si trovino, in funzione di k , i valori di minimo e massimo relativo di f .

La funzione $f(x) = x^3 - 6x^2 + k$ è una cubica definita in tutto \mathbb{R} le cui derivate prima e seconda sono rispettivamente $f'(x) = 3x^2 - 12x$ e $f''(x) = 6x - 12$. In particolare si ha:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x > 0 \Rightarrow x < 0 \vee x > 4 \text{ cioè la funzione è strettamente crescente in } (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x < 0 \Rightarrow 0 < x < 4 \text{ cioè la funzione è strettamente decrescente in } (0, 4)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 4$$

$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ è ascissa di flesso a tangente obliqua}$$

$$\begin{cases} f''(0) = -12 < 0 \\ f''(4) = 12 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ascissa di massimo relativo proprio} \\ x = 4 \text{ ascissa di minimo relativo proprio} \end{cases}$$

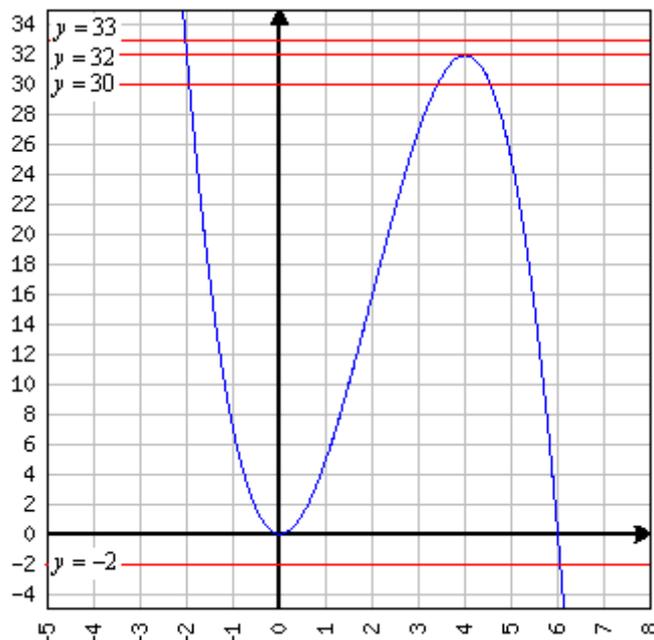
Dalle considerazioni sopra effettuate deduciamo che la funzione $f(x) = x^3 - 6x^2 + k$ presenta un massimo relativo in $M \equiv (0, k)$, un minimo relativo in $m \equiv (4, k - 32)$ e un flesso a tangente obliqua in $F \equiv (2, k - 16)$.

Punto 2

Per quali valori di k , f ha tre zeri reali distinti?

Per rispondere al quesito risolviamo il sistema seguente: $\begin{cases} y = 6x^2 - x^3 \\ y = k \end{cases}$. La cubica $y = 6x^2 - x^3$ è

definita in tutto \mathbb{R} , interseca l'asse delle ascisse in $(0,0)$ e $(6,0)$, quello delle ordinate in $(0,0)$, è positiva o uguale a zero per $x \leq 6$, non presenta asintoti e presenta un minimo in $(0,0)$, un massimo in $(4, 32)$ ed un flesso a tangente obliqua in $(2,16)$. La retta $y = k$ è una retta parallela all'asse delle ascisse. Rappresentiamo in un unico sistema di riferimento la cubica $y = 6x^2 - x^3$ e le rette di equazione $y = 30, y = 32, y = 33, y = -2$:



Dal grafico soprastante si evidenziano le seguenti soluzioni:

1. 1 soluzione per $k < 0 \vee k > 32$. In particolare per $k < 0$ l'unica soluzione è positiva mentre per $k > 32$ è negativa;
2. 3 soluzioni di cui due coincidenti per $k = 0 \vee k = 32$. In particolare per $k = 0$ le tre soluzioni sono $x = 0$ doppia e $x = 6$, mentre per $k = 32$ le tre soluzioni sono $x = 4$ doppia e $x = -2$;
3. 3 soluzioni distinte per $0 < k < 32$ di cui due positive ed una negativa.

Quindi per $0 < k < 32$ la funzione $f(x) = x^3 - 6x^2 + k$ ha 3 zeri reali distinti.

Punto 3

Si trovi il valore di k tale che il valor medio di f nell'intervallo chiuso $[-1, 2]$ sia 1.

Il valor medio di una funzione $f(x)$ nell'intervallo chiuso $[a, b]$ è definito come

$$\bar{V} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \text{ Per il caso in esame i ha:}$$

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \frac{1}{3} \int_{-1}^2 (x^3 - 6x^2 + k) dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + kx \right]_{-1}^2 = \\ &= \frac{1}{3} \left[(4 - 16 + 2k) - \left(\frac{1}{4} + 2 - k \right) \right] = \frac{1}{3} \left(3k - \frac{57}{4} \right) \end{aligned}$$

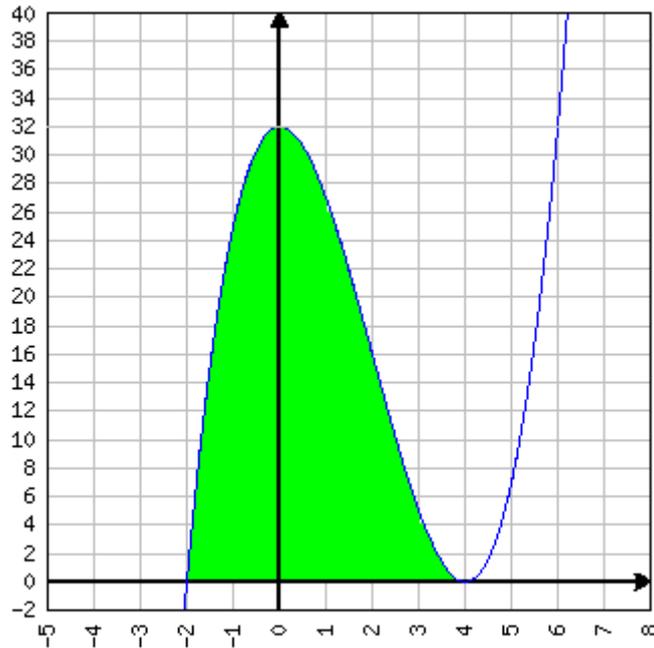
$$\text{Imponendo } \bar{V} = 1 \text{ si ha } \frac{1}{3} \left(3k - \frac{57}{4} \right) = 1 \Rightarrow \left(3k - \frac{57}{4} \right) = 3 \Rightarrow k = \frac{23}{4}.$$

Punto 4

Si determini l'area della regione finita delimitata dal grafico di f e dall'asse x quando $k=32$.

Se $k = 32$ la funzione $f(x) = x^3 - 6x^2 + k$ presenta un massimo relativo in $M \equiv (0, 32)$, un minimo relativo in $m \equiv (4, 0)$ e un flesso a tangente obliqua in $F \equiv (2, 16)$.

L'area da calcolare è rappresentata in verde nella figura sottostante:



L'area vale:

$$S = \int_{-2}^4 (x^3 - 6x^2 + 32) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 32x \right]_{-2}^4 = (64 - 128 + 128) - (4 + 16 - 64) = 108.$$

PROBLEMA 2

Siano date la parabola λ e la retta r d'equazioni rispettive $y = x^2 + 1$ e $y = x - 1$

Punto 1

Quale è la distanza minima tra λ e r ? E quale ne è il valore?

Un generico punto della parabola λ è $P \equiv (a, a^2 + 1)$. La distanza di $P \equiv (a, a^2 + 1)$ dalla retta di

equazione $y - x + 1 = 0$ è $d(a) = \frac{|a^2 + 1 - a + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|a^2 - a + 2|}{\sqrt{2}} \xrightarrow[\Delta = -7 < 0]{a^2 - a + 2 > 0 \text{ in quanto}} d(a) = \frac{a^2 - a + 2}{\sqrt{2}}$. La

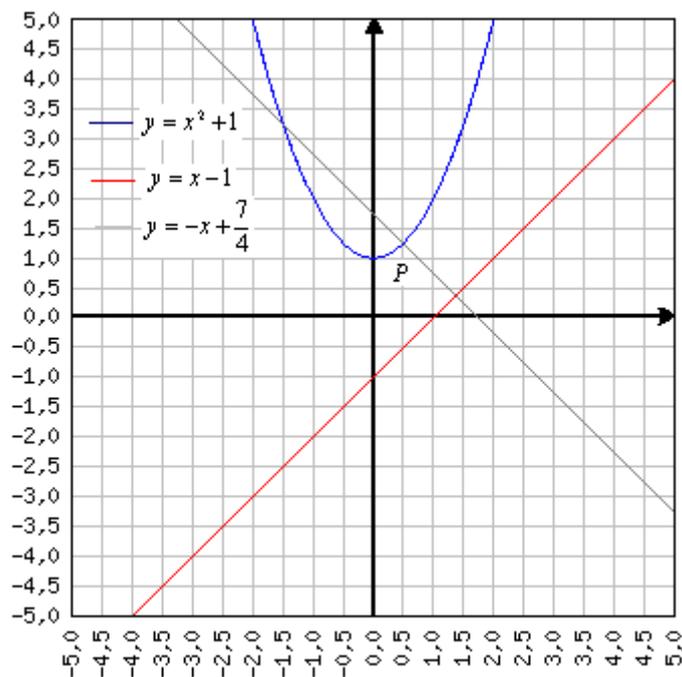
funzione distanza $d(a) = \frac{a^2 - a + 2}{\sqrt{2}}$ è una parabola con concavità verso l'alto per cui raggiunge il

suo minimo nell'ascissa del vertice, ergo $a_{\min} = \frac{1}{2} \rightarrow d(a_{\min}) = \frac{7\sqrt{2}}{8}$. La retta perpendicolare alla

retta $y = x - 1$ e passante per $P \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$ ha equazione $s: y = -\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{4} = -x + \frac{7}{4}$. Nel grafico

sottostante vengono mostrate nello stesso riferimento cartesiano la parabola λ , la retta r e la retta

$s: y = -x + \frac{7}{4}$

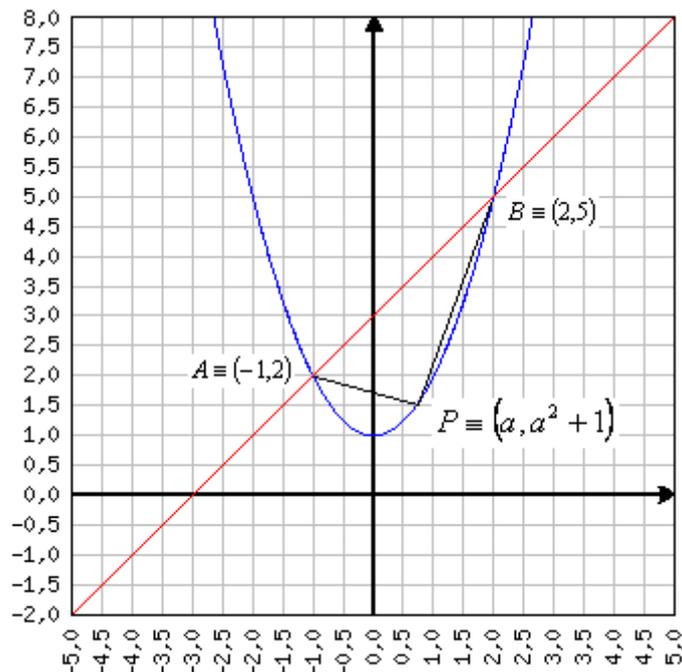
*Punto 2*

Siano A e B i punti d'intersezione di λ con la retta s d'equazione $y = -x + 3$, si determini il punto P appartenente all'arco AB tale che il triangolo ABP abbia area massima

I punti A e B di intersezione sono:

$$A, B : \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x + 3 \end{cases} \rightarrow x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} A \equiv (-1, 2) \\ B \equiv (2, 5) \end{cases}$$

Un generico punto della parabola λ è $P \equiv (a, a^2 + 1)$.



La base AB del triangolo APB misura $\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ mentre l'altezza è la distanza di

$P \equiv (a, a^2 + 1)$ dalla retta $y = x + 3$. L'altezza misura $h(a) = \frac{|a^2 - a - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|(a+1)(a-2)|}{\sqrt{2}}$ e poiché

geometricamente deve aversi $-1 < a < 2$ deduciamo che

$h(a) = \frac{|a^2 - a - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|(a+1)(a-2)|}{\sqrt{2}} = \frac{-(a^2 - a - 2)}{\sqrt{2}}$. L'area del triangolo APB è massima quando è

massima l'altezza $h(a) = \frac{-(a^2 - a - 2)}{\sqrt{2}}$; l'altezza $h(a) = \frac{-(a^2 - a - 2)}{\sqrt{2}}$ non è altro che una parabola

con concavità verso il basso che raggiunge il suo massimo nell'ascissa del vertice, per cui l'area

massima si ha per $a_{\max} = \frac{1}{2} \rightarrow h(a_{\max}) = \frac{9\sqrt{2}}{8}$ da cui $S(a_{\max}) = \frac{3\sqrt{2} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{8}}{2} = \frac{27}{8}$.

Punto 3

Si determini l'area del segmento parabolico di base AB e si verifichi che essa è $\frac{4}{3}$ dell'area del triangolo ABP.

L'area del segmento parabolico di base AB è data dall'integrale seguente:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{Sett.Par.AB}} &= \int_{-1}^2 [x+3 - (x^2+1)] dx = \int_{-1}^2 [-x^2 + x + 2] dx = \\
 &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 = \left[-\frac{8}{3} + 2 + 4 \right] - \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right] = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

Il rapporto tra l'area del settore parabolico e quella del triangolo APB è $\frac{S_{\text{Sett.Par.AB}}}{S_{\text{APB}}} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{27}{8}} = \frac{4}{3}$.

Punto 4

Si determini il volume del solido generato dalla rotazione completa del segmento parabolico di base AB attorno all'asse x.

Il volume del solido generato dalla rotazione completa del segmento parabolico di base AB attorno all'asse x è dato dall'integrale seguente:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{Sett.Par.AB}} &= \pi \int_{-1}^2 [x+3]^2 dx - \pi \int_{-1}^2 [(x^2+1)]^2 dx = \\
 &= \pi \left[\frac{(x+3)^3}{3} \right]_{-1}^2 - \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right]_{-1}^2 = \\
 &= \pi \left[\left(\frac{125}{3} \right) - \left(\frac{8}{3} \right) \right] - \pi \left[\left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2 \right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{3} - 1 \right) \right] = \\
 &= 39\pi - \pi \left[\frac{206}{15} + \frac{28}{15} \right] = 39\pi - \frac{78}{5}\pi = \frac{117\pi}{5}
 \end{aligned}$$

QUESTIONARIO*Quesito 1*

Indicata con S_n la somma di n termini in progressione geometrica di primo termine $\frac{1}{2}$ e ragione $\frac{1}{2}$ si calcoli il $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$.

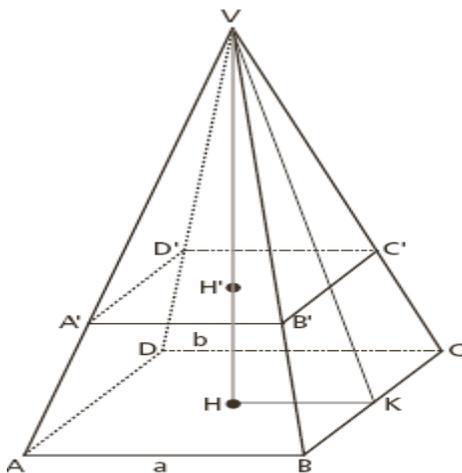
La somma S_n di n termini in progressione geometrica di primo termine $a_1 = \frac{1}{2}$ e ragione $q = \frac{1}{2}$ è

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n. \text{ Ora } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n \cdot 2^n} \right] = 0.$$

Quesito 2

Una piramide ha la base quadrata e l'altezza uguale a 8cm . Quanti piani paralleli alla base dividono la piramide in due parti i cui volumi sono nel rapporto $7:1$? Quali sono le distanze di tali piani dal vertice della piramide?

Consideriamo la figura sottostante raffigurante una piramide, supposta retta, a base quadrata di lato $\overline{AB} = a$ ed altezza $\overline{VH} = 8\text{ cm}$:



Il poligono $A'B'C'D'$, ottenuto sezionando la piramide retta $ABCDV$ con un piano parallelo alla base, è simile al quadrato di base $ABCD$ ed è quindi anch'esso un quadrato di lato $\overline{A'B'} = b < a$. Si indica con H' il punto in cui l'altezza VH incontra la sezione $A'B'C'D'$. Per un teorema di geometria euclidea nello spazio è noto che, se si seziona una piramide con un piano parallelo alla base, la sezione e la base sono poligoni simili e i lati di questi poligoni sono proporzionali alle distanze del loro piano dal vertice V . Dal parallelismo delle due basi discende che $\overline{VH'} = h$ con $0 < h < 8$ è altezza della piramide $A'B'C'D'V$ e che l'altezza del tronco di piramide è $\overline{HH'} = (8 - h)$.

Quindi si ha: $h : 8 = b : a \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{8}{h}$. Il volume della piramide $A'B'C'D'V$ è $V(A'B'C'D'V) = \frac{1}{3}b^2h$

mentre il volume del tronco di piramide di base $ABCD$ ed altezza $\overline{HH'} = (8-h)$ è

$V_{tronco} = \frac{1}{3}(8-h)(a^2 + b^2 + ab)$, per cui il rapporto tra i volumi è

$$R = \frac{V_{tronco}}{V(A'B'C'D'V)} = \left(\frac{8-h}{h}\right) \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right) + 1 \right] \xrightarrow{\frac{a}{b} = \frac{8}{h}}$$

$$R = \left(\frac{8-h}{h}\right) \left[\left(\frac{8}{h}\right)^2 + \left(\frac{8}{h}\right) + 1 \right] = \frac{(8-h)(h^2 + 8h + 64)}{h^3} = \frac{512 - h^3}{h^3}$$

Tale rapporto può essere o $R = 7$ o $R = \frac{1}{7}$. Imponendo $R = 7$ ricaviamo

$$\frac{512 - h^3}{h^3} = 7 \rightarrow 8h^3 = 512 \rightarrow h^3 = 64 \rightarrow h = 4 \text{ [cm]} \quad \text{mentre imponendo } R = \frac{1}{7} \text{ ricaviamo}$$

$$\frac{512 - h^3}{h^3} = \frac{1}{7} \rightarrow 8h^3 = 7 \cdot 512 \rightarrow h^3 = 7 \cdot 64 \rightarrow h = 4\sqrt[3]{7} \text{ [cm]}. \text{ In conclusione i piani paralleli alla}$$

base che dividono la piramide in due parti i cui volumi sono nel rapporto 7:1 sono due e il vertice della piramide dista da essi $h = 4 \text{ [cm]}$ oppure $h = 4\sqrt[3]{7} \text{ [cm]}$.

Quesito 3

Un recipiente contiene 1000 litri di liquido. Se è un parallelepipedo a base quadrata, quali ne sono le dimensioni minime?

Sia a il lato della base quadrata del parallelepipedo ed h la sua altezza. Il volume del parallelepipedo è $V = A_{Base} \cdot h = a^2 \cdot h$ e dovendo essere 1000 litri = 1 m^3 si ricava (esprimendo le

dimensioni in metri) $h = \frac{V}{a^2} = \frac{1}{a^2}$. La superficie totale del parallelepipedo è

$$S_T(a, h) = 2(a^2 + 2ah) \xrightarrow{h = \frac{1}{a^2}} S_T(a) = 2\left(a^2 + \frac{2}{a}\right). \text{ La minimizzazione della superficie totale la}$$

effettuiamo tramite calcolo delle derivate:

$$S'_T(a) = 4\left(\frac{a^3 - 1}{a^2}\right)$$

$$S''_T(a) = 4\left(\frac{a^3 + 2}{a^3}\right)$$

Si ha:

$$S'_T(a) = 4\left(\frac{a^3 - 1}{a^2}\right) > 0 \Rightarrow a > 1 \Rightarrow S_T \text{ strettamente crescente in } (1, +\infty)$$

$$S'_T(a) = 4\left(\frac{a^3 - 1}{a^2}\right) < 0 \Rightarrow 0 < a < 1 \Rightarrow S_T \text{ strettamente decrescente in } (0, 1)$$

Inoltre $S''_T(1) = 4\left(\frac{a^3 + 2}{a^3}\right)_{a=1} = 8 > 0$, per cui il lato di base a che minimizza la superficie totale è

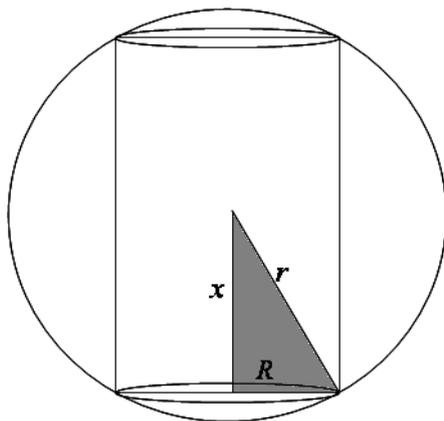
$a = 1$ [m] ed in corrispondenza l'altezza vale $h = \left[\frac{1}{a^2}\right]_{a=1} = 1$ [m]. In conclusione il parallelepipedo

a base quadrata di volume 1000 litri di dimensioni minime è un cubo di lato 1 metro.

Quesito 4

Quale è il cilindro di volume massimo inscrivibile in una sfera assegnata?

Si consideri la figura sottostante in cui abbiamo indicato l'altezza del cilindro pari a $2x$ con $0 \leq x \leq r$ con r raggio della sfera.



Il raggio di base del cilindro, per il teorema di Pitagora, vale $R = \sqrt{r^2 - x^2}$ per cui il volume del cilindro è $V_C(x) = \pi \cdot 2x \cdot (r^2 - x^2) = 2\pi(xr^2 - x^3)$. Le derivate prima e seconda della funzione volume sono rispettivamente:

$$V'_C(x) = 2\pi(r^2 - 3x^2)$$

$$V''_C(x) = -12\pi \cdot x$$

Quindi la funzione volume, tenendo presente la limitazione $0 \leq x \leq r$, è strettamente crescente nell'intervallo $\left]0, \frac{r}{\sqrt{3}}\right[$ e strettamente decrescente in $\left]\frac{r}{\sqrt{3}}, r\right[$. Inoltre

$V''_C\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right) = -12\pi\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right) = -4\pi \cdot r\sqrt{3} < 0$ per cui il volume massimo lo si ha per $x = \frac{r}{\sqrt{3}}$ e vale

$$V_{C,\max}\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right) = 2\pi\left(\frac{r}{\sqrt{3}} \cdot r^2 - \left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^3\right) = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9} \cdot r^3.$$

Quesito 5

Quando una funzione f è invertibile? Come si calcola la derivata della funzione inversa f^{-1} ?

Fai un esempio.

Una funzione $f(x)$ è invertibile in un intervallo $[a,b]$ se è biiettiva, cioè iniettiva e suriettiva. Iniettiva significa che per ogni (x, y) del dominio vale $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ (detto in parole povere la funzione mappa distinti elementi del dominio in distinti elementi del codominio). Suriettiva significa che per ogni elemento y del codominio esiste (almeno) un elemento x del dominio tale che $y = f(x)$ (cioè ogni elemento del codominio è immagine di almeno un elemento del dominio).

Praticamente una funzione $f(x)$ è invertibile in un intervallo $[a,b]$ se strettamente monotona in $[a,b]$. In generale detta $g(y)$ l'inversa di $f(x)$, la derivata di g , per un noto teorema che recita "La derivata di una funzione inversa è uguale al reciproco della derivata della funzione diretta (purché quest'ultima derivata non sia nulla)" è $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$. Si fa notare che le due derivate che

compaiono nella formula si intendono calcolate in due punti che si corrispondono.

La funzione $f(x) = 10^{x+8}$ è invertibile in quanto strettamente crescente in tutto \mathbb{R} . Riscrivendo la

funzione $f(x) = 10^{x+8}$ come $f(x) = e^{\ln(10^{x+8})} = e^{(x+8)\ln 10}$ si ricava che la sua derivata è $f'(x) = e^{(x+8)\ln 10} \cdot \ln 10 = \ln 10 \cdot 10^{x+8}$ che risulta essere strettamente positiva in tutto \mathbb{R} .

Calcoliamo la derivata della funzione inversa di $f(x) = 10^{x+8}$ in $y = 10^8$. L'inversa di $f(x) = 10^{x+8}$

è $g(y) = \log_{10}(y) - 8$ e a $y = 10^8$ corrisponde $x = 0$ per cui

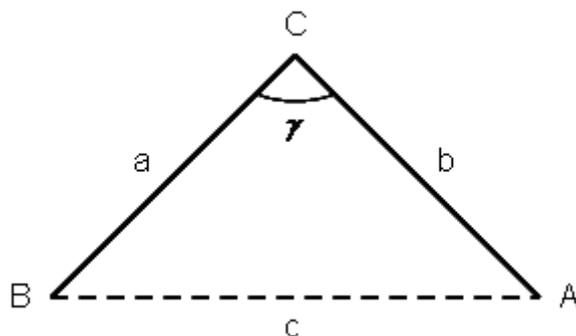
$g'(10^8) = \frac{1}{f'(0)} = \left[\frac{1}{\ln 10 \cdot 10^{x+8}} \right]_{x=0} = \frac{1}{\ln 10 \cdot 10^8}$. Controlliamo se il valore calcolato è corretto. La

derivata di $g(y) = \log_{10}(y) - 8$ è $g'(y) = \frac{1}{\ln 10 \cdot y}$ e $g'(10^8) = \frac{1}{\ln 10 \cdot 10^8}$ come già trovato.

Quesito 6

Spiegare come utilizzare il teorema di Carnot per trovare la distanza tra due punti accessibili ma separati da un ostacolo.

Consideriamo la figura seguente raffigurante la geometria del problema:



Essendo A e B accessibili da un generico punto C, è possibile misurarli sperimentalmente e indichiamo con $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ le relative distanze di B ed A da C; inoltre con un goniometro è possibile misurare l'angolo γ . Conoscendo due lati e l'angolo compreso, tramite il teorema di Carnot si misura $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)}$.

Quesito 7

Trovare il periodo della funzione : $y = \sin\left(\frac{2}{3}x\right) + \sin\left(\frac{1}{4}x\right)$

Se si hanno due funzioni periodiche con diverso periodo T_1 e T_2 , e se esistono multipli interi comuni dei due periodi, allora le funzioni somma, prodotto, quoziente, hanno periodo uguale al minimo comune multiplo dei periodi.

In questo caso la funzione $y = \sin\left(\frac{2}{3}x\right) + \sin\left(\frac{1}{4}x\right)$ la riscriviamo come $y = \sin\left(\frac{2\pi}{3\pi}x\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{8\pi}x\right)$

e i periodi sono $T_1 = 3\pi$ e $T_2 = 8\pi$ per cui il periodo della funzione somma è $T = m.c.m[T_1, T_2] = 24\pi$.

Quesito 8

Dimostrate che la somma di qualsiasi numero reale positivo e del suo reciproco è almeno 2

Sia s un numero reale positivo, dimostriamo che $\left(s + \frac{1}{s}\right) \geq 2$. Proviamo che la disequazione

$\left(s + \frac{1}{s}\right) \geq 2$ è soddisfatta $\forall s > 0$. La disequazione $\left(s + \frac{1}{s}\right) \geq 2$ può essere scritta come

$\frac{s^2 - 2s + 1}{s} = \frac{(s-1)^2}{s} \geq 0$, ed essendo $s > 0$ ed $(s-1)^2 \geq 0$ in quanto quadrato di un numero,

deduciamo che $\frac{(s-1)^2}{s} \geq 0 \forall s > 0$ come volevamo dimostrare.