SEZIONI BILINGUI ITALO-ALBANESI

ESAME DI STATO A.S. 2004-2005
PROVA SCRITTA DI MATEMATICA

1. Studiare e rappresentare graficamente in un piano cartesiano ortogonale XOY la funzione $F(x)=\frac{x^2+1}{4-x^2}$. Verificare che le tangenti alla funzione nei punti A e B di ascissa $x=1$ e $x=-1$, si incontrano in un punto dell'asse delle ordinate.

2. Studiare e rappresentare graficamente in un piano cartesiano ortogonale XOY le due parabole di equazioni

$$Y = X^2 - 4X + 1 \quad \text{e} \quad Y = 1 - X^2$$

Determinare quindi i punti comuni tra le due parabole e trovare l'area della parte finita di piano compresa tra le due funzioni.

3. Dati i due numeri complessi Z_1 =3-3i e Z_2= 1+i, calcola il prodotto $Z_1 \cdot Z_2$. Rappresenta nel piano di Gauss il numero complesso così ottenuto e determinane modulo e argomento.

4. Risolvere con il metodo di Cramer il seguente sistema

$$\begin{cases} 3x-6y-3z=-2 \\ -3x-z=0 \\ x-3y+2z=4 \end{cases}$$

La durata della prova è di ore 4.

PROBLEMA1

Punto 1

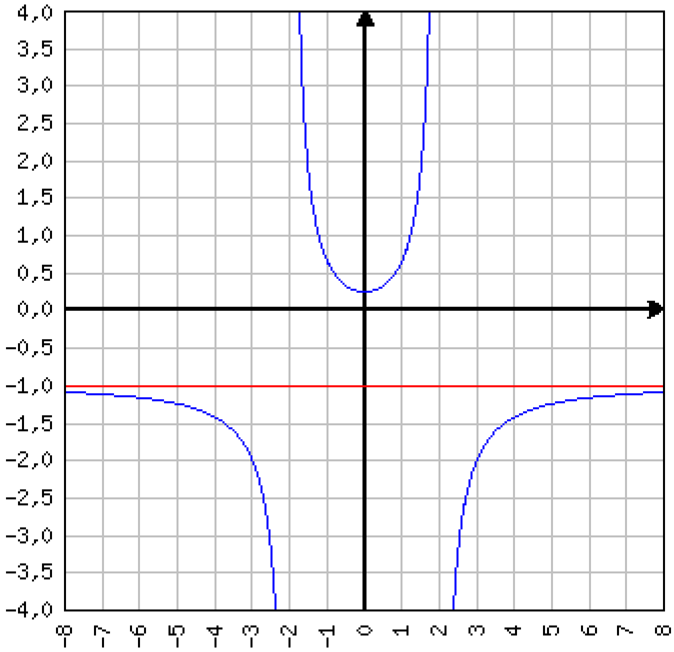
Studiare e rappresentare graficamente in un piano cartesiano ortogonale XOY la funzione $F(x)=\frac{x^2+1}{4-x^2}$.

- *Dominio*: $R/\{\pm 2\}$;
- *Intersezione asse delle ascisse*: non ce ne sono;
- *Intersezioni asse delle ordinate*: $x=0 \to F(0)=\frac{1}{4}$;
- *Eventuali simmetrie*: è una funzione pari, infatti $F(-x)=\frac{(-x)^2+1}{4-(-x)^2}=\frac{x^2+1}{4-x^2}=F(x)$;
- *Positività*: $F'(x)=\frac{x^2+1}{4-x^2}>0 \Rightarrow 4-x^2>0 \Rightarrow -2<x<2$;
- *Asintoti verticali*:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+1}{4-x^2}=-\infty,\ \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+1}{4-x^2}=+\infty$$
$$\lim_{x\to -2^+}\frac{x^2+1}{4-x^2}=+\infty,\ \lim_{x\to -2^-}\frac{x^2+1}{4-x^2}=-\infty$$

per cui $x=\pm 2$ sono due asintoti verticali destro e sinistro;

- *Asintoti orizzontali*: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{4-x^2}=-1$ per cui $y=-1$ è asintoto orizzontale;
- *Asintoti obliqui*:trattandosi di una funzione razionale fratta, la presenza di asintoti orizzontali esclude quella degli obliqui;
- *Crescenza e decrescenza*: la derivata prima è $F'(x)=\frac{2x(4-x^2)+2x(x^2+1)}{(4-x^2)^2}=\frac{10x}{(4-x^2)^2}>0 \Rightarrow x\in(0,2)\cup(2,+\infty)$ per cui la funzione è strettamente crescente in $(0,2)\cup(2,+\infty)$ e strettamente decrescente in $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$;
- *Concavità e convessità*: la derivata seconda è $F''(x)=\frac{10(3x^2+4)}{(4-x^2)^3}>0 \Rightarrow -2<x<2$ per cui in $(-2,2)$ la funzione ha concavità verso l'alto; inoltre $F''(0)=\frac{5}{8}>0$ per cui $\left(0,\frac{1}{4}\right)$è un minimo relativo. Il grafico è sotto presentato:



Punto 2

Verificare che le tangenti alla funzione nei punti A e B di ascissa $x=1$ e $x=-1$, si incontrano in un punto dell'asse delle ordinate.

I punti A e B sono $A=\left(1,\frac{2}{3}\right), B=\left(-1,\frac{2}{3}\right)$. Le due tangenti nei punti $A=\left(1,\frac{2}{3}\right), B=\left(-1,\frac{2}{3}\right)$ sono rispettivamente:

$$t_A : y = m_A(x-1)+\frac{2}{3}$$

$$t_B : y = m_B(x+1)+\frac{2}{3}$$

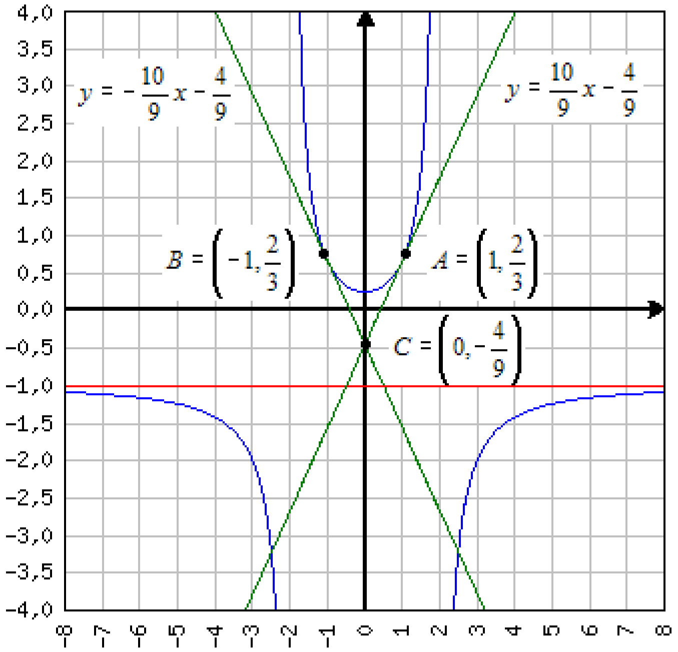
dove $m_A = \left[\frac{10x}{\left(4-x^2\right)^2}\right]_{x=1} = \frac{10}{9}, m_B = \left[\frac{10x}{\left(4-x^2\right)^2}\right]_{x=-1} = -\frac{10}{9}$ per cui le tangenti sono

$$t_A : y = \frac{10}{9}(x-1)+\frac{2}{3} = \frac{10}{9}x-\frac{4}{9}$$

$$t_B : y = -\frac{10}{9}(x+1)+\frac{2}{3} = -\frac{10}{9}x-\frac{4}{9}$$

Calcoliamo il punto C di incontro:

$$C : \begin{cases} y = \frac{10}{9}x-\frac{4}{9} \\ y = -\frac{10}{9}x-\frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow C = \left(0,-\frac{4}{9}\right)$$



$y = -\frac{10}{9}x - \frac{4}{9}$
$y = \frac{10}{9}x - \frac{4}{9}$
$B = \left(-1, \frac{2}{3}\right)$
$A = \left(1, \frac{2}{3}\right)$
$C = \left(0, -\frac{4}{9}\right)$

PROBLEMA2

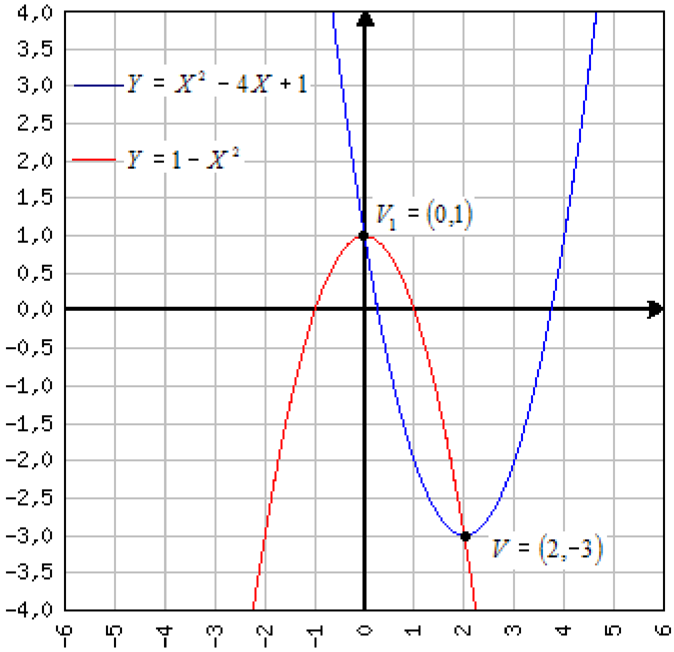
Punto 1

Studiare e rappresentare graficamente in un piano cartesiano ortogonale XOY le due parabole di equazioni

$$Y = X^2 - 4X + 1 \quad \textbf{e} \qquad Y = 1 - X^2$$

La parabola $Y = X^2 - 4X + 1$ ha concavità verso l'alto, vertice in $V = (2,-3)$ ed interseca l'asse delle ascisse in $x_{\pm} = 2 \pm \sqrt{3}$ e l'asse delle ordinate in $(0,1)$.

La parabola $Y = 1 - X^2$ ha concavità verso il basso, vertice in $V_1 = (0,1)$ ed interseca l'asse delle ascisse in $x_{\pm} = \pm 1$ e l'asse delle ordinate in $(0,1)$.



Punto 2

Determinare quindi i punti comuni tra le due parabole e trovare l'area della parte finita di piano compresa tra le due funzioni.

I punti comuni alle due parabole come già evidenziato dal grafico soprastante sono i due vertici $V = (2,-3)$ e $V_1 = (0,1)$. Analiticamente si tratta di risolvere il sistema

$$V, V_1 : \begin{cases} Y = X^2 - 4X + 1 \\ Y = 1 - X^2 \end{cases} \Rightarrow X^2 - 4X + 1 = 1 - X^2 \Rightarrow 2X(X-2) = 0 \Rightarrow V = (2,-3), V_1 = (0,1).$$

L'area da calcolare è

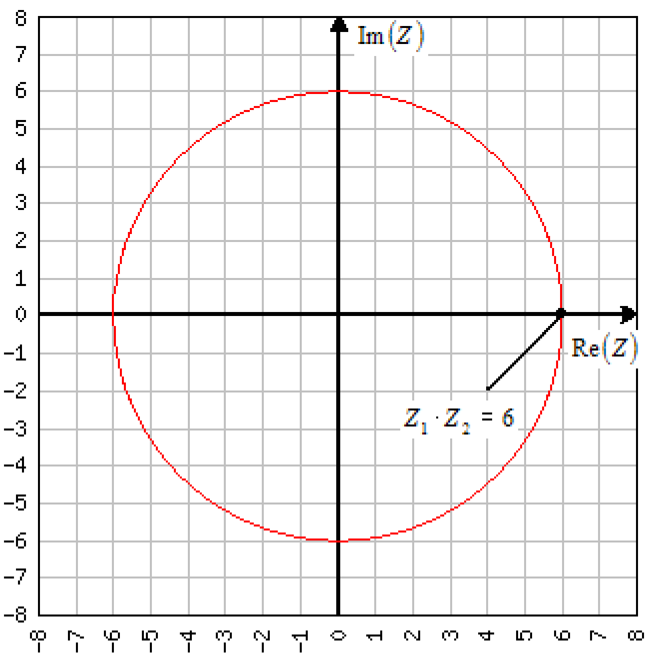
$$S = \int_0^2 \left[\left(1 - X^2\right) - \left(X^2 - 4X + 1\right)\right] dX = \int_0^2 \left(-2X^2 + 4X\right) dX = \left[-\frac{2X^3}{3} + 2X^2\right]_0^2 = -\frac{16}{3} + 8 = \frac{8}{3}.$$

PROBLEMA3

Dati i due numeri complessi Z_1 =3-3i e Z_2= 1+i, calcola il prodotto $Z_1 \cdot Z_2$. Rappresenta nel piano di Gauss il numero complesso così ottenuto e determinane modulo e argomento.

Il numero complesso $Z_1 = 3 - 3i = 3(1-i)$ può essere scritto nella forma esponenziale come $Z_1 = 3\sqrt{2} \cdot e^{-i\cdot\frac{\pi}{4}}$ e nella forma trigonometrica come $Z_1 = 3\sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = 3\sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$. Il numero complesso $Z_2 = (1+i)$ può essere scritto nella forma esponenziale come $Z_2 = \sqrt{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$ e nella forma trigonometrica come $Z_2 = \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

Il prodotto dei numeri complessi ha come modulo il prodotto dei moduli ed argomento la somma degli argomenti, per cui $Z_1 \cdot Z_2 = |Z_1| \cdot |Z_2| \cdot e^{i(\arg(Z_1)+\arg(Z_2))}$ e nel caso in esame $Z_1 \cdot Z_2 = |Z_1| \cdot |Z_2| \cdot e^{i(\arg(Z_1)+\arg(Z_2))} = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = 6$. Il piano di Gauss è un piano in cui sull'asse delle ascisse c'è la parte reale di un numero complesso e sull'asse delle ordinate la parte immaginaria. Il numero $Z_1 \cdot Z_2 = 6$ ha banalmente parte immaginaria nulla, per cui nel piano di gauss è rappresentato nel seguente modo:



PROBLEMA4

Risolvere con il metodo di Cramer il seguente sistema

$$\begin{cases} 3x-6y-3z=-2 \\ -3x-z=0 \\ x-3y+2z=4 \end{cases}$$

Per il teorema di Cramer le tre soluzioni sono:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -6 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{24+6}{6-27-36-9}=\frac{30}{-66}=-\frac{5}{11}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{-66}=\frac{2+36-12+12}{-66}=-\frac{19}{33}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -6 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}}{-66}=\frac{-18-72}{-66}=\frac{15}{11}$$