MINISTERO DELL'ISTRUZIONE, DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA
SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO
ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Sessione Ordinaria 2005
Calendario australe
SECONDA PROVA SCRITTA
Tema di Matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sia $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2}$ e sia $F(x)$ la sua primitiva tale che $F(1)=f(1)$. Siano inoltre φ e Φ le curve rappresentative rispettivamente di *f* e *F*.

1. Nel piano riferito ad assi cartesiani, ortogonali e monometrici, si disegnino φ e Φ;
2. si determinino le coordinate dei punti comuni a φ e Φ e le equazioni delle tangenti alle due curve in tali punti;
3. si determini l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve e dalla retta $x+2=0$.

PROBLEMA 2

Il triangolo ABC ha il lato BC che è il doppio di CA di lunghezza *k* mentre il triangolo rettangolo ABD, con D dalla parte opposta di C rispetto ad AB, ha il cateto AB che è il doppio di BD.

1. Si esprima l'area del quadrilatero ADBC in funzione dell'angolo ACB;
2. si determini il valore di ACB cui corrisponde il quadrilatero di area massima;
3. di tale quadrilatero si determini area e perimetro.

QUESTIONARIO

1. Prova che fra tutti i cilindri inscritti in un cono circolare retto ha volume massimo quello la cui altezza è la terza parte di quella del cono.
2. S_n indica la somma di n termini in progressione geometrica di primo termine 1/3 e ragione 1/3. Calcola il $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$
3. Una piramide ha la base quadrata e l’altezza uguale a $10cm$. Quanti piani paralleli alla base dividono la piramide in due parti i cui volumi sono nel rapporto 7:3? Quali sono le distanze di tali piani dal vertice della piramide?
4. Considera la cubica $\mathbf{y = x^3}$ e illustra le variazioni che intervengono nel suo grafico per l’aggiunta ad $\mathbf{x^3}$ di un termine kx al variare di k nell’insieme dei numeri reali.
5. Due lati di un triangolo misurano a e b. Determina il terzo lato in modo che l’area sia massima.
6. Calcola la derivata della funzione $y = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$. Cosa puoi dire della funzione? E’ costante? Illustra il perché della tua risposta.
7. Spiega come utilizzeresti il teorema di Carnot per trovare la distanza tra due punti accessibili ma separati da un ostacolo.
8. Quando una funzione f è *invertibile*? Come si può calcolare la derivata della funzione inversa f^{-1}? Fai un esempio.

Durata della prova: 6 ore.

Non è consentito lasciare l’Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

È consentito l’uso della calcolatrice non programmabile.

PROBLEMA 1

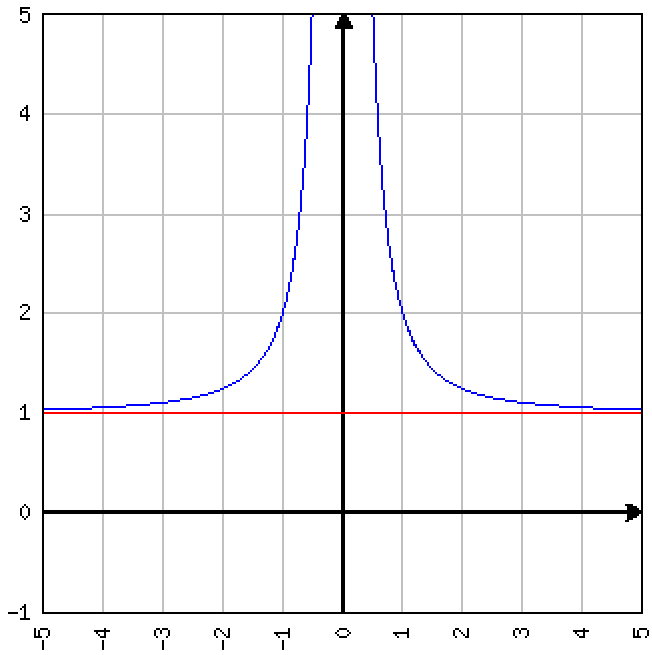
Sia $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2}$ **e sia** $F(x)$ **la sua primitiva tale che** $F(1)=f(1)$**. Siano inoltre φ e Φ le curve rappresentative rispettivamente di *f* e *F*.**

Punto 1

Nel piano riferito ad assi cartesiani, ortogonali e monometrici, si disegnino φ e Φ;

Studiamo la funzione $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2}$

- *Dominio*: $R/\{0\}$;
- *Intersezione asse delle ascisse*: non ve ne sono;
- *Intersezioni asse delle ordinate*: non ve ne sono;
- *Eventuali simmetrie*: è una funzione pari in quanto $f(-x)=f(x)$;
- *Positività*: $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2}>0 \Rightarrow \forall x \in R/\{0\}$;
- *Asintoti verticali*: $\lim_{x\to 0^\pm}\frac{x^2+1}{x^2}=+\infty$ per cui $x=0$ è asintoto verticale;
- *Asintoti orizzontali*: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=1$ per cui $y=1$ è esistono asintoto orizzontale;
- *Asintoti obliqui*: non ve ne sono vista la presenza dell'asintoto orizzontale;
- *Crescenza e decrescenza*: la derivata prima è $y'=-\frac{2}{x^3}$. Quindi $y'=-\frac{2}{x^3}>0 \Rightarrow x\in(-\infty,0)$. In conclusione la funzione $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2}$ è strettamente crescente in $(-\infty,0)$ e strettamente decrescente in $(0,+\infty)$.
- *Concavità e convessità*: la derivata seconda è $f''(x)=\frac{6}{x^4}>0 \Rightarrow x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ per cui in $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ la funzione ha concavità verso l'alto. Il grafico è sotto presentato:



$F(x)=\int\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)dx=\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx=x-\frac{1}{x}+k$. Imponendo $F(1)=f(1)=2$ si ricava $k=2$ da cui $F(x)=x-\frac{1}{x}+2=\frac{x^2+2x-1}{x}$. La funzione $F(x)=\frac{x^2+2x-1}{x}$ non è altro che una iperbole di asintoto verticale $x=0$ ed asintoto obliquo $y=x+2$.

Studiamo analiticamente la funzione $F(x)=\frac{x^2+2x-1}{x}$ e ritroviamo i risultati di cui sopra.

- *Dominio*: $R/\{0\}$;
- *Intersezione asse delle ascisse*: $F(x)=\frac{x^2+2x-1}{x}=0 \Rightarrow x=-1\pm\sqrt{2}$;
- *Intersezioni asse delle ordinate*: non ve ne sono;
- *Eventuali simmetrie*: non è una funzione né pari né dispari;
- *Positività*: $F(x)=\frac{x^2+2x-1}{x}>0 \Rightarrow -1-\sqrt{2}<x<0 \vee x>-1+\sqrt{2}$;
- *Asintoti verticali*: $\lim_{x\to 0^\pm}\frac{x^2+2x-1}{x}=\mp\infty$ per cui $x=0$ è asintoto verticale;
- *Asintoti orizzontali*: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x-1}{x}=\pm\infty$ per cui non esistono asintoti orizzontali;
- *Asintoti obliqui*: hanno equazione $y=mx+q$ con

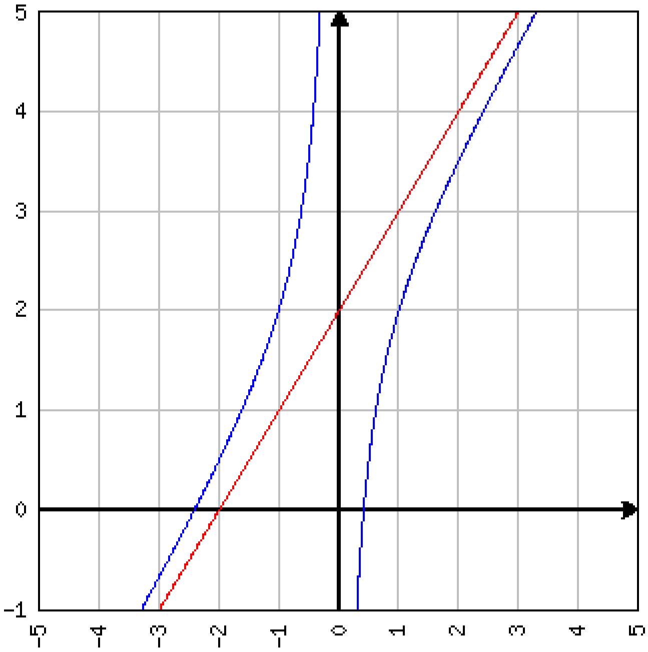
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2} = 1,$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} [F(x)-mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+2x-1}{x} - x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x-1}{x} \right) = 2$$

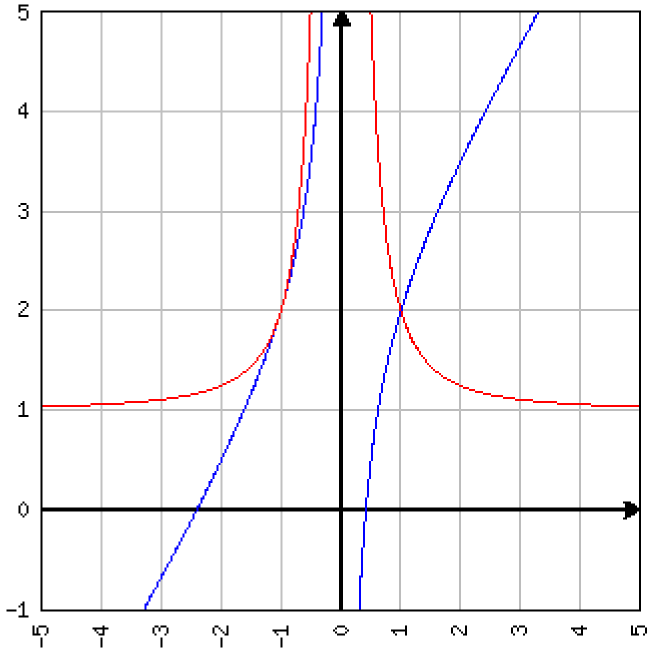
Per cui l'asintoto obliquo ha equazione $y = x + 2$

- *Crescenza e decrescenza*: la derivata prima è $F'(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$. Quindi la funzione $F(x) = \frac{x^2+2x-1}{x}$ è strettamente crescente in $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$.
- *Concavità e convessità*: la derivata seconda è $F''(x) = -\frac{2}{x^3} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty,0)$ per cui in $(-\infty,0)$ la funzione ha concavità verso l'alto.

Il grafico è sotto presentato:



Il grafico sottostante mostra in uno stesso riferimento cartesiano ambo i grafici:



Punto 2

si determinino le coordinate dei punti comuni a φ e Φ e le equazioni delle tangenti alle due curve in tali punti;

I punti di intersezione si ricavano risolvendo il sistema seguente:

$$A,B:\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2} \\ F'(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{x^2+1}{x^2}=\frac{x^2+2x-1}{x} \Rightarrow x^2+1=x^3+2x^2-x \Rightarrow x^3+x^2-x-1=(x+1)(x-1)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} A=(1,2) \\ B=(-1,2) \end{cases}$$

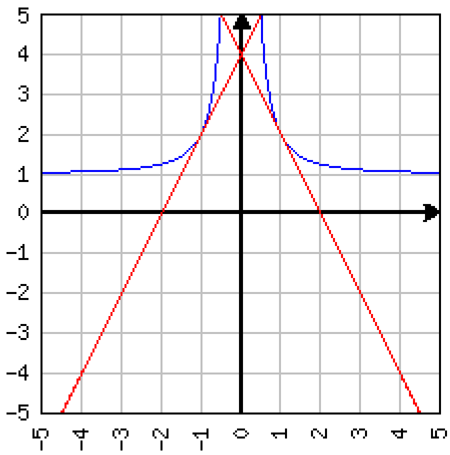
Le tangenti in A e B alla curva $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2}$ hanno equazioni:

$$y=m_A(x-1)+2$$
$$y=m_B(x+1)+2$$

con $m_A=\left[-\dfrac{2}{x^3}\right]_{x=1}=-2, m_B=\left[-\dfrac{2}{x^3}\right]_{x=-1}=2$ da cui

$$y=-2(x-1)+2=-2x+4$$
$$y=2(x+1)+2=2x+4$$

Di seguito vengono raffigurate le due tangenti alla curva $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2}$



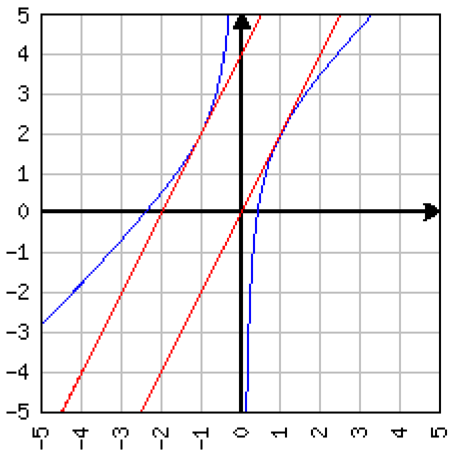
Le tangenti in A e B alla curva $F(x)=\frac{x^2+2x-1}{x}$ hanno equazioni:

$$y=m_A(x-1)+2$$
$$y=m_B(x+1)+2$$

con $m_A=\left[\frac{x^2+1}{x^2}\right]_{x=1}=2, m_B=\left[\frac{x^2+1}{x^2}\right]_{x=-1}=2$ da cui

$$y=2(x-1)+2=2x$$
$$y=2(x+1)+2=2x+4$$

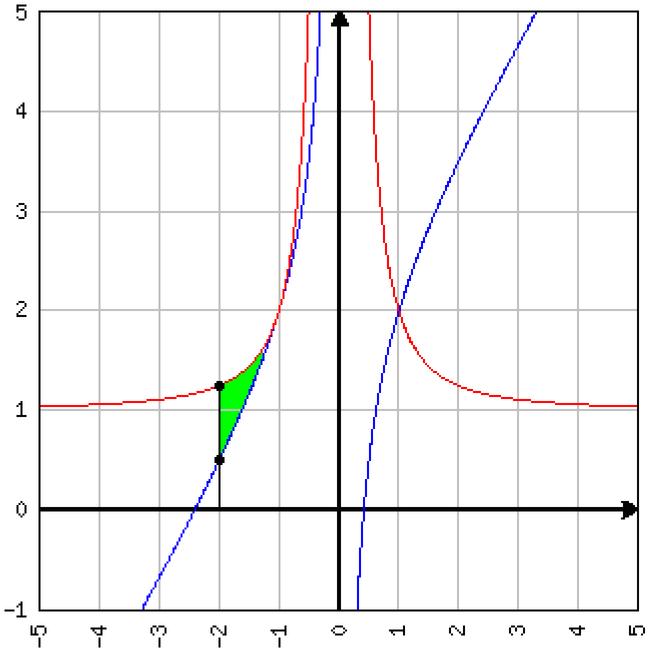
Di seguito vengono raffigurate le due tangenti alla curva $F(x)=\frac{x^2+2x-1}{x}$



Punto 3

si determini l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve e dalla retta $x+2=0$

L'area è raffigurata in verde nella figura sottostante:



L'area vale:

$$S=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{x^2+1}{x^2}-\frac{x^2+2x-1}{x}\right)dx=\int_{-2}^{-1}\left(1+\frac{1}{x^2}-x-2+\frac{1}{x}\right)dx=\int_{-2}^{-1}\left(-x-1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx=$$

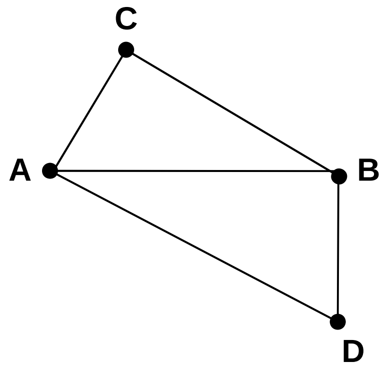
$$=\left[-\frac{(x+1)^2}{2}-\frac{1}{x}+\ln|x|\right]_{-2}^{-1}=(1)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ln 2\right)=1-\ln 2$$

PROBLEMA 2

Il triangolo ABC ha il lato BC che è il doppio di CA di lunghezza *k* mentre il triangolo rettangolo ABD, con D dalla parte opposta di C rispetto ad AB, ha il cateto AB che è il doppio di BD.

Punto 1

Si esprima l'area del quadrilatero ADBC in funzione dell'angolo ACB;



Per ipotesi $\overline{CB}=2k,\overline{CA}=k,\overline{BD}=\frac{\overline{AB}}{2}$. Poniamo $A\hat{C}B=x$.

Il triangolo ABC ha area $S(ABC)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{CB}\cdot\sin\left(A\hat{B}C\right)=k^2\sin(x)$. Per il teorema di Carnot il lato AB misura $\overline{AB}=\sqrt{4k^2+k^2-4k^2\cos(x)}=k\sqrt{5-4\cos(x)}$. L'area del triangolo ADB vale $S(ADB)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BD}=\frac{\overline{AB}^2}{4}=\frac{k^2}{4}[5-4\cos(x)]$. Quindi l'area del quadrilatero è $S(ADCB)=k^2\sin(x)+\frac{k^2}{4}[5-4\cos(x)]=\frac{5k^2}{4}+k^2[\sin(x)-\cos(x)]=\frac{5k^2}{4}+k^2\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Punto 2

si determini il valore di ACB cui corrisponde il quadrilatero di area massima;

Sia $f(x)=\frac{5k^2}{4}+k^2\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

L'area è massima quando $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$ e cioè quando $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}=135°$ e l'area massima vale $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{5k^2}{4}+k^2\sqrt{2}=k^2\left(\frac{5+4\sqrt{2}}{4}\right)$.

Punto 3

di tale quadrilatero si determini area e perimetro.

L'area, come già trovato al punto precedente, vale $S(ABCD)=k^2\left(\frac{5+4\sqrt{2}}{4}\right)$.

Il lato BD misura $\overline{BD} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{k}{2}\sqrt{5+2\sqrt{2}}$ mentre $\overline{AD} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2} = \frac{\overline{AB}}{2}\sqrt{5} = \frac{k}{2}\sqrt{25+10\sqrt{2}}$.

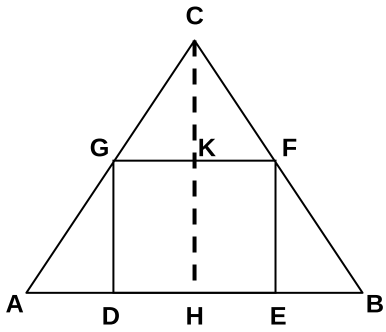
In conclusione il perimetro misura $2p(ABCD) = 3k + \frac{k}{2}\sqrt{5+2\sqrt{2}} + \frac{k}{2}\sqrt{25+10\sqrt{2}} = \frac{k}{2}\left[6 + \left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{5+2\sqrt{2}}\right]$.

QUESTIONARIO

Quesito 1

Prova che fra tutti i cilindri inscritti in un cono circolare retto ha volume massimo quello la cui altezza è la terza parte di quella del cono.

Si consideri la figura sottostante raffigurante in sezione il cono circoscritto al cilindro.



Siano r ed h il raggio di base e l'altezza del cono rispettivamente. Poniamo $\overline{KH} = x$ con $0 < x < h$. I triangoli CHB e FEB sono simili per cui $\overline{CH} : \overline{HB} = \overline{FE} : \overline{EB}$ e cioè $h : r = x : \overline{EB}$ da cui $\overline{EB} = \frac{xr}{h}$ da cui il raggio di base del cilindro è $R = \overline{HB} - \overline{EB} = r - \frac{xr}{h} = r\left(1 - \frac{x}{h}\right)$. Il volume del cilindro è $V_{Cilindro}(x) = \left(\pi \cdot \overline{HE}^2\right) \cdot \overline{KH} = \pi r^2 x \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2$. La massimizzazione del volume la effettuiamo tramite derivazione. La derivata prima del volume è:

$V'_{Cilindro}(x) = \pi r^2 \left[\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 - \frac{2x}{h}\left(1 - \frac{x}{h}\right)\right] = \pi r^2 \left[\frac{3x^2}{h^2} - \frac{4x}{h} + 1\right] = \frac{\pi r^2}{h^2}(3x - h)(x - h)$ per cui

$$V'_{Cilindro}(x) = \frac{\pi r^2}{h^2}(3x - h)(x - h) > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{h}{3} \Rightarrow V_{Cilindro}(x) \text{ strettamente crescente in } \left(0, \frac{h}{3}\right)$$

$$V'_{Cilindro}(x) = \frac{\pi r^2}{h^2}(3x - h)(x - h) < 0 \Rightarrow \frac{h}{3} < x < h \Rightarrow V_{Cilindro}(x) \text{ strettamente decrescente in } \left(\frac{h}{3}, h\right)$$

$$V'_{Cilindro}(x) = \frac{\pi r^2}{h^2}(3x - h)(x - h) = 0 \Rightarrow x = h \vee x = \frac{h}{3}$$

Inoltre $V''_{Cilindro}(x) = \frac{2\pi r^2}{h^2}(3x - 2h) \Rightarrow V''_{Cilindro}\left(\frac{h}{3}\right) = -\frac{2\pi r^2}{h} < 0$ per cui il volume del cilindro è massimo per $x = \frac{h}{3}$ e vale $V_{Cilindro}\left(\frac{h}{3}\right) = \pi r^2 \left(\frac{h}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4\pi r^2 h}{27}$.

Quesito 2

S_n indica la somma di n termini in progressione geometrica di primo termine 1/3 e ragione 1/3. Calcola il $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$

La somma S_n di una progressione geometrica di primo termine a_1 e ragione q è:

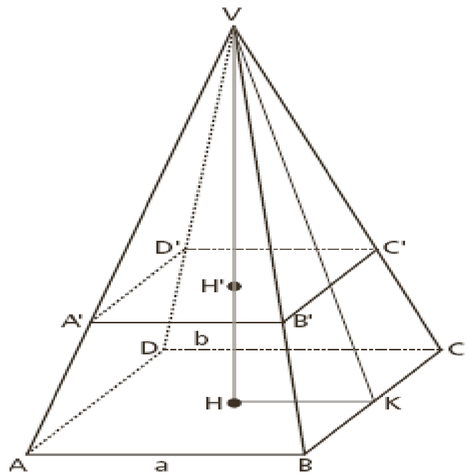
$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1} = \frac{1}{3}\left[\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{3}\right) - 1}\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right].$$

Ora $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n\cdot 3^n}\right] = 0$.

Quesito 3

Una piramide ha la base quadrata e l'altezza uguale a 10*cm*. Quanti piani paralleli alla base dividono la piramide in due parti i cui volumi sono nel rapporto 7:3? Quali sono le distanze di tali piani dal vertice della piramide?

Consideriamo la figura sottostante raffigurante una piramide, supposta retta, a base quadrata di lato $\overline{AB} = a$ ed altezza $\overline{VH} = 10\text{ cm}$:



Il poligono $A'B'C'D'$, ottenuto sezionando la piramide retta $ABCDV$ con un piano parallelo alla base, è simile al quadrato di base $ABCD$ ed è quindi anch'esso un quadrato di lato $\overline{A'B'} = b < a$. Si indica con H' il punto in cui l'altezza VH incontra la sezione $A'B'C'D'$. Per un teorema di geometria euclidea nello spazio è noto che, se si seziona una piramide con un piano parallelo alla base, la sezione e la base sono poligoni simili e i lati di questi poligoni sono proporzionali alle distanze del loro piano dal vertice V. Dal parallelismo delle due basi discende che

$\overline{VH'} = h$ con $0 < h < 10$ è altezza della piramide $A'B'C'D'V$ e che l'altezza del tronco di piramide è $\overline{HH'} = (10 - h)$.

Quindi si ha: $h:10 = b:a \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{10}{h}$. Il volume della piramide $A'B'C'D'V$ è $V(A'B'C'D'V) = \frac{1}{3}b^2 h$ mentre il volume del tronco di piramide di base $ABCD$ ed altezza $\overline{HH'} = (10 - h)$ è $V_{tronco} = \frac{1}{3}(10 - h)(a^2 + b^2 + ab)$, per cui il rapporto tra i volumi è

$$R = \frac{V_{tronco}}{V(A'B'C'D'V)} = \left(\frac{10-h}{h}\right)\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right) + 1\right] \xrightarrow{\frac{a}{b}=\frac{10}{h}}$$

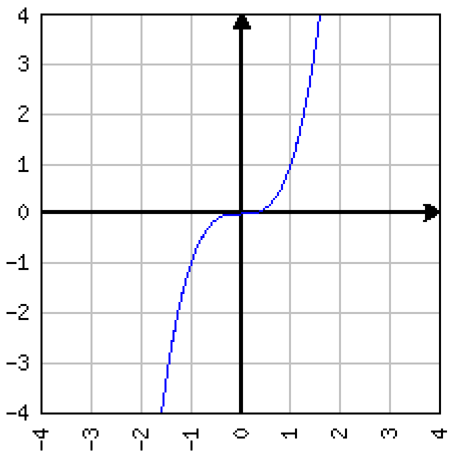
$$R = \left(\frac{10-h}{h}\right)\left[\left(\frac{10}{h}\right)^2 + \left(\frac{10}{h}\right) + 1\right] = \frac{(10-h)(h^2 + 10h + 100)}{h^3} = \frac{1000 - h^3}{h^3}$$

Tale rapporto può essere o $R = \frac{7}{3}$ o $R = \frac{3}{7}$. Imponendo $R = \frac{7}{3}$ ricaviamo $\frac{1000 - h^3}{h^3} = \frac{7}{3} \rightarrow 10h^3 = 3000 \rightarrow h^3 = 300 \rightarrow h = \sqrt[3]{300}\,[\text{cm}]$ mentre imponendo $R = \frac{3}{7}$ ricaviamo $\frac{1000 - h^3}{h^3} = \frac{3}{7} \rightarrow 10h^3 = 7000 \rightarrow h^3 = 700 \rightarrow h = \sqrt[3]{700}\,[\text{cm}]$. In conclusione i piani paralleli alla base che dividono la piramide in due parti i cui volumi sono nel rapporto 7:3 sono due e il vertice della piramide dista da essi $h = \sqrt[3]{300}\,[\text{cm}]$ oppure $h = \sqrt[3]{700}\,[\text{cm}]$.

Quesito 4

Considera la cubica y = x^3 e illustra le variazioni che intervengono nel suo grafico per l'aggiunta ad x^3 di un termine *kx* al variare di *k* nell'insieme dei numeri reali.

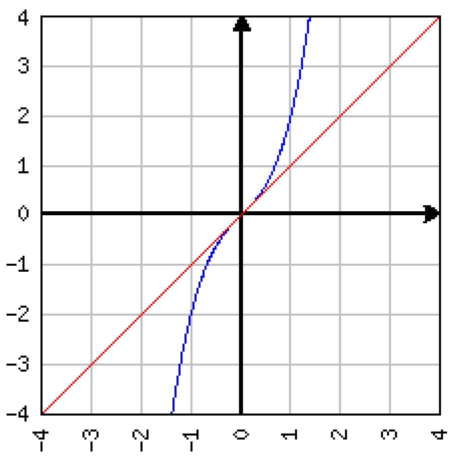
La cubica $y = x^3$ è definita in R, interseca l'asse delle ascisse e delle ordinate nell'unico punto $(0,0)$, è positiva in $(0,+\infty)$, è strettamente crescente in tutto R e presenta un flesso a tangente orizzontale in $(0,0)$ di equazione $y = 0$. Il suo grafico segue:



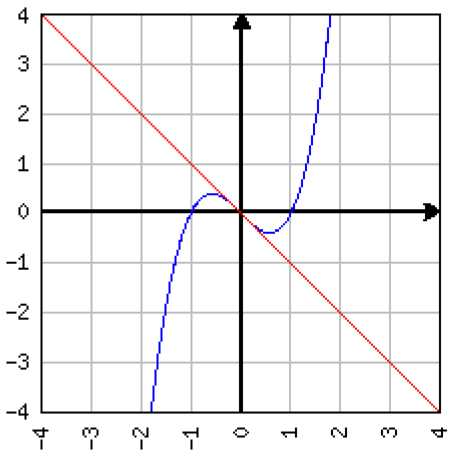
Studiamo come varia il grafico soprastante con l'aggiunta di un termine kx e separiamo lo studio per

1. $k > 0$;
2. $k < 0$

Se $k > 0$ la funzione diventa $y = x^3 + kx = x(x^2 + k)$ che come $y = x^3$ è definita in R, interseca l'asse delle ascisse e delle ordinate nell'unico punto $(0,0)$, è positiva in $(0,+\infty)$, è strettamente crescente in tutto R e presenta un flesso a tangente obliqua in $(0,0)$ di equazione $y = kx$. Quindi l'aggiunta di un termine kx per $k > 0$ comporta che il flesso a tangente orizzontale in $(0,0)$ si tramuta in flesso a tangente obliqua di equazione $y = kx$. Di seguito il grafico per $k = 1$:



Se $k < 0$ la funzione diventa $y = x^3 + kx = x^3 - |k|x = x(x^2 - |k|)$. Tale funzione è definita in R, presenta tre intersezioni con l'asse delle ascisse nei punti $(0,0), (\sqrt{|k|},0), (-\sqrt{|k|},0)$ ed una sola con le ordinate in $(0,0)$, è positiva in $(-\sqrt{|k|},0) \cup (\sqrt{|k|},+\infty)$, è strettamente crescente in $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{|k|}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{|k|}{3}},+\infty\right)$ e strettamente decrescente in $\left(-\sqrt{\frac{|k|}{3}},\sqrt{\frac{|k|}{3}}\right)$, presenta un massimo relativo in $\left(-\sqrt{\frac{|k|}{3}}, \frac{2|k|}{3}\sqrt{\frac{|k|}{3}}\right)$ un minimo relativo in $\left(\sqrt{\frac{|k|}{3}}, -\frac{2|k|}{3}\sqrt{\frac{|k|}{3}}\right)$ ed un flesso a tangente obliqua in $(0,0)$ di equazione $y = kx = -|k|x$. Quindi l'aggiunta di un termine kx per $k < 0$ comporta che il flesso a tangente orizzontale in $(0,0)$ si tramuta in flesso a tangente obliqua di equazione $y = kx = -|k|x$, così come per $k > 0$, ed inoltre comporta che la funzione presenta due estremi relativi, un massimo relativo in $\left(-\sqrt{\frac{|k|}{3}}, \frac{2|k|}{3}\sqrt{\frac{|k|}{3}}\right)$ e un minimo relativo in $\left(\sqrt{\frac{|k|}{3}}, -\frac{2|k|}{3}\sqrt{\frac{|k|}{3}}\right)$, cioè la cubica non è più strettamente crescente in tutto R, caratteristica questa sia di $y = x^3$ che di $y = x^3 + kx$ con $k > 0$, ma presenta anche una stretta decrescenza in $\left(-\sqrt{\frac{|k|}{3}}, \sqrt{\frac{|k|}{3}}\right)$. Di seguito il grafico per $k = -1$:



Quesito 5

Due lati di un triangolo misurano a e b. Determina il terzo lato in modo che l'area sia massima.

Sia δ l'angolo tra i due lati del triangolo. L'area del triangolo vale $S = \frac{ab\sin(\delta)}{2}$ ed è massima se $\sin(\delta) = 1$ e cioè se $\delta = 90°$ cioè quando il triangolo è rettangolo. Quindi per il teorema di Pitagora il terzo lato misura $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Quesito 6

Calcola la derivata della funzione $y = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$. Cosa puoi dire della funzione? E' costante? Illustra il perché della tua risposta.

La funzione $y = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$ è definita per $x \in R/\{0\}$. La derivata prima è:

$$y' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Essendo la derivata prima nulla, la funzione è costante negli intervalli di esistenza $(-\infty,0)$ e $(0,+\infty)$, e il valore della costante può essere trovato valutando la funzione in un punto qualsiasi dei due intervalli $(-\infty,0)$ e $(0,+\infty)$, ad esempio in $\sqrt{3} \in (0,+\infty)$ e $-\sqrt{3} \in (-\infty,0)$. In questo caso

$$y(\sqrt{3}) = \arctan(\sqrt{3}) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

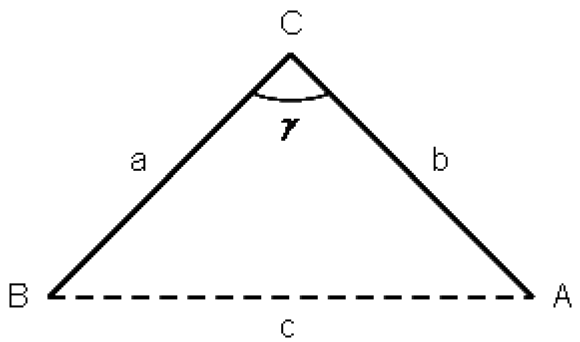
$$y(-\sqrt{3}) = -\arctan(\sqrt{3}) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$$

In conclusione la funzione è costante a tratti e vale $y = \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } x \in (0,+\infty) \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x \in (-\infty,0) \end{cases}$.

Quesito 7

Spiegare come utilizzare il teorema di Carnot per trovare la distanza tra due punti accessibili ma separati da un ostacolo.

Consideriamo la figura seguente raffigurante la geometria del problema:



Essendo A e B accessibili da un generico punto C, è possibile misurarli sperimentalmente e indichiamo con $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ le relative distanze di B ed A da C; inoltre con un goniometro è possibile misurare l'angolo γ . Conoscendo due lati e l'angolo compreso, tramite il teorema di Carnot si misura $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)}$.

Quesito 8

Quando una funzione *f* è *invertibile*? Come si può calcolare la derivata della funzione inversa f^{-1} ? Fai un esempio.

Una funzione $f(x)$ è invertibile in un intervallo [a,b] se è biiettiva, cioè iniettiva e suriettiva. Iniettiva significa che per ogni (x, y) del dominio vale $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ (detto in parole povere la funzione mappa distinti elementi del dominio in distinti elementi del codominio). Suriettiva significa che per ogni elemento y del codominio esiste (almeno) un elemento x del dominio tale che $y = f(x)$ (cioè ogni elemento del codominio è immagine di almeno un elemento del dominio). Praticamente una funzione $f(x)$ è invertibile in un intervallo [a,b] se strettamente monotona in [a,b]. In generale detta $g(y)$ l'inversa di $f(x)$, la derivata di g, per un noto teorema che recita "*La derivata di una funzione inversa è uguale al reciproco della derivata della funzione diretta (purché quest'ultima derivata non sia nulla)*" è $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$. Si fa notare che le due derivate che compaiono nella formula si intendono calcolate in due punti che si corrispondono.

Ad esempio la funzione $f(x) = 10^{x+8}$ è invertibile in quanto strettamente crescente in tutto R. Riscrivendo la funzione $f(x) = 10^{x+8}$ come $f(x) = e^{\ln(10^{x+8})} = e^{(x+8)\ln 10}$ si ricava che la sua derivata è $f'(x) = e^{(x+8)\ln 10} \cdot \ln 10 = \ln 10 \cdot 10^{x+8}$ che risulta essere strettamente positiva in tutto R.

Calcoliamo la derivata della funzione inversa di $f(x) = 10^{x+8}$ in $y = 10^8$. L'inversa di $f(x) = 10^{x+8}$ è $g(y) = \log_{10}(y) - 8$ e a $y = 10^8$ corrisponde $x = 0$ per cui $g'(10^8) = \frac{1}{f'(0)} = \left[\frac{1}{\ln 10 \cdot 10^{x+8}}\right]_{x=0} = \frac{1}{\ln 10 \cdot 10^8}$. Controlliamo se il valore calcolato è corretto. La derivata di $g(y) = \log_{10}(y) - 8$ è $g'(y) = \frac{1}{\ln 10 \cdot y}$ e $g'(10^8) = \frac{1}{\ln 10 \cdot 10^8}$ come già trovato.